Notes from the Margin XVII

CMS Student Committee

March 2025 (Vol. 57, No. 2)

CMS Student Committee

The Margin is a bi-annual, bilingual publication intended for a wide mathematical audience. It features a variety of content, including concise research articles, opinion pieces, math-related stories, as well as puzzles and riddles — all of which are meant to be accessible to the entire mathematical community, starting from the senior undergraduate level. It is delivered electronically to all student members of the Canadian Mathematical Society, and you can download a .pdf version of the latest issue by clicking on the cover below. You can also read the issues in your browser through the CMS Studc Issue page, and physical copies of the Margin are available at CMS Meetings and at the CUMC.

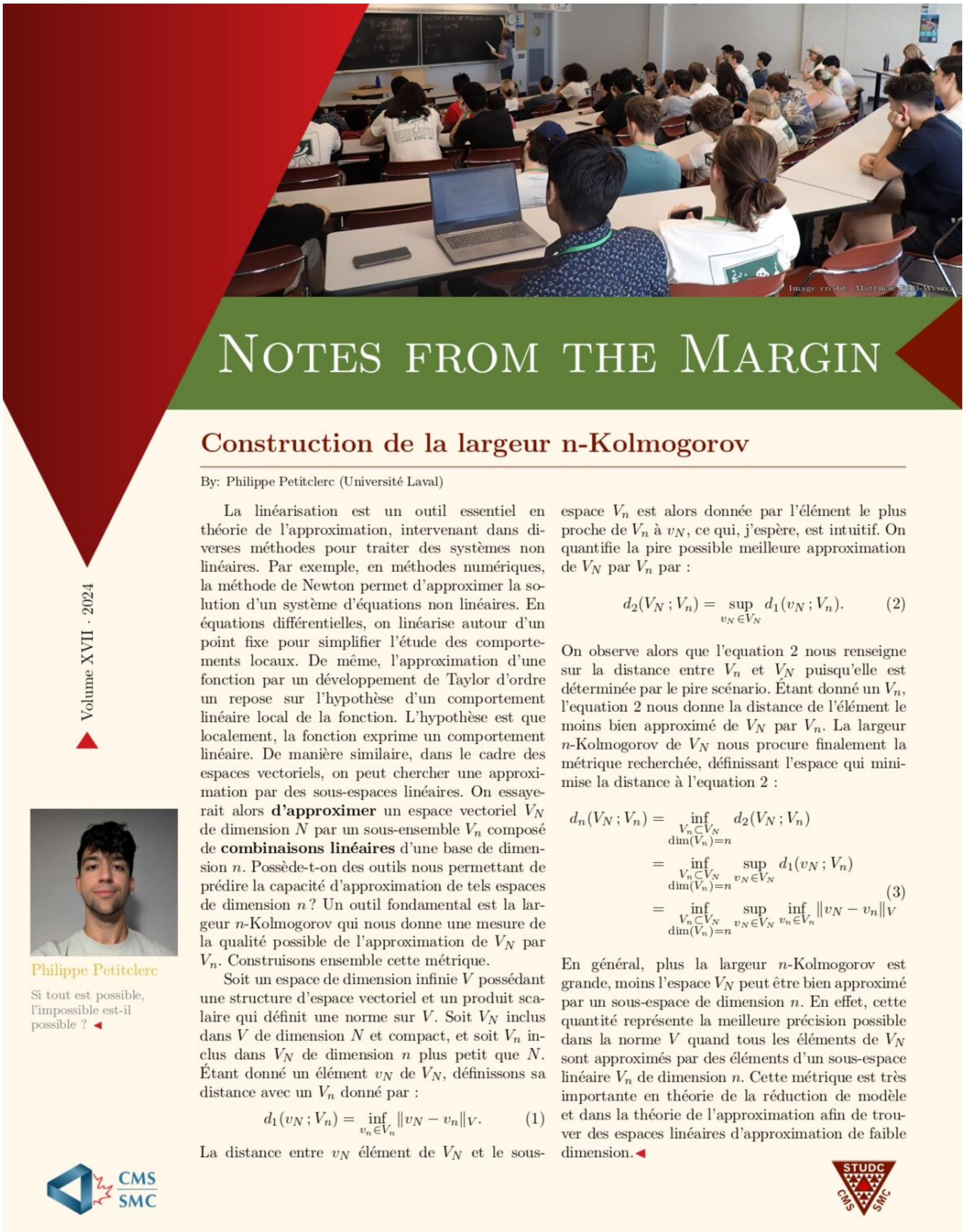

Image credit: Matthew Hall-Wong

NOTES FROM THE MARGIN

Construction de la largeur n-Kolmogorov

By: Philippe Petitclerc (Université Laval)

La linéarisation est un outil essentiel en théorie de l'approximation, intervenant dans diverses méthodes pour traiter des systèmes non linéaires. Par exemple, en méthodes numériques, la méthode de Newton permet d'approximer la solution d'un système d'équations non linéaires. En équations différentielles, on linéarise autour d'un point fixe pour simplifier l'étude des comportements locaux. De même, l'approximation d'une fonction par un développement de Taylor d'ordre un repose sur l'hypothèse d'un comportement linéaire local de la fonction. L'hypothèse est que localement, la fonction exprime un comportement linéaire. De manière similaire, dans le cadre des espaces vectoriels, on peut chercher une approximation par des sous-espaces linéaires. On essayerait alors **d'approximer** un espace vectoriel V_N de dimension N par un sous-ensemble V_n composé de **combinaisons linéaires** d'une base de dimension n. Possède-t-on des outils nous permettant de prédire la capacité d'approximation de tels espaces de dimension n ? Un outil fondamental est la largeur n-Kolmogorov qui nous donne une mesure de la qualité possible de l'approximation de V_N par V_n. Construisons ensemble cette métrique.

Soit un espace de dimension infinie V possédant une structure d'espace vectoriel et un produit scalaire qui définit une norme sur V. Soit V_N inclus dans V de dimension N et compact, et soit V_n inclus dans V_N de dimension n plus petit que N. Étant donné un élément v_N de V_N, définissons sa distance avec un V_n donné par :

$$d_1(v_N\,;V_n) = \inf_{v_n\in V_n} \|v_N - v_n\|_V. \qquad (1)$$

La distance entre v_N élément de V_N et le sous-espace V_n est alors donnée par l'élément le plus proche de V_n à v_N, ce qui, j'espère, est intuitif. On quantifie la pire possible meilleure approximation de V_N par V_n par :

$$d_2(V_N\,;V_n) = \sup_{v_N\in V_N} d_1(v_N\,;V_n). \qquad (2)$$

On observe alors que l'equation 2 nous renseigne sur la distance entre V_n et V_N puisqu'elle est déterminée par le pire scénario. Étant donné un V_n, l'equation 2 nous donne la distance de l'élément le moins bien approximé de V_N par V_n. La largeur n-Kolmogorov de V_N nous procure finalement la métrique recherchée, définissant l'espace qui minimise la distance à l'equation 2 :

$$\begin{aligned} d_n(V_N\,;V_n) &= \inf_{\substack{V_n\subset V_N\\ \dim(V_n)=n}} d_2(V_N\,;V_n) \\ &= \inf_{\substack{V_n\subset V_N\\ \dim(V_n)=n}} \sup_{v_N\in V_N} d_1(v_N\,;V_n) \\ &= \inf_{\substack{V_n\subset V_N\\ \dim(V_n)=n}} \sup_{v_N\in V_N} \inf_{v_n\in V_n} \|v_N - v_n\|_V \end{aligned} \qquad (3)$$

En général, plus la largeur n-Kolmogorov est grande, moins l'espace V_N peut être bien approximé par un sous-espace de dimension n. En effet, cette quantité représente la meilleure précision possible dans la norme V quand tous les éléments de V_N sont approximés par des éléments d'un sous-espace linéaire V_n de dimension n. Cette métrique est très importante en théorie de la réduction de modèle et dans la théorie de l'approximation afin de trouver des espaces linéaires d'approximation de faible dimension.

Volume XVII · 2024

Philippe Petitclerc

Si tout est possible, l'impossible est-il possible ?

CMS SMC

STUDC CMS SMC