Notes from the Margin XVII

Comité étudiant de la SMC Mars 2025 (tome 57, no. 2)

CMS Student Committee

La revue *Notes from the Margin* est une publication biannuelle, bilingue et destinée à un grand public d'étudiants en mathématiques. Son contenu est diversifié et comprend de courts articles de recherches, des essais sur l'histoire des mathématiques, des entrevues, des articles d'opinions et des énigmes mathématiques. Peu importe le format, nous visons à ce que le contenu de notre revue soit accessible à toute la communauté mathématique, en commençant par les étudiants en fin de baccalauréat. La revue est distribuée électroniquement à tous les membres étudiants de la Société Mathématique du Canada et vous pouvez aussi télécharger une version pdf des numéros passés en cliquant sur une des couvertures ci-dessous. Il est aussi possible de lire la revue en ligne directement via la page *Issuu* du comité étudiant de la SMC et des copies papiers sont disponibles aux réunions de la SMC ainsi qu'à la CCÉM.

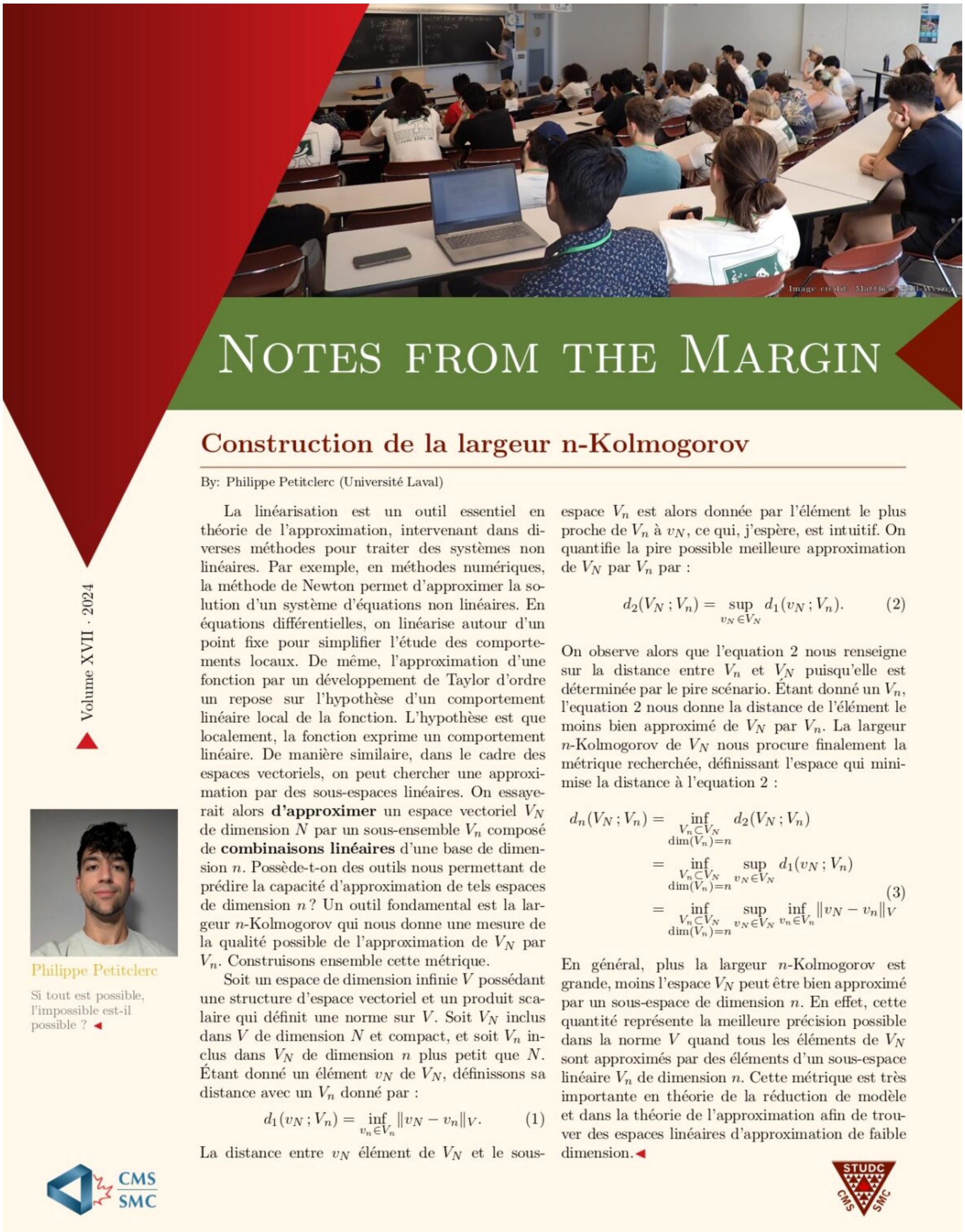

Image credit: Matthew Hill-Weize

NOTES FROM THE MARGIN

Volume XVII · 2024

Construction de la largeur n-Kolmogorov

By: Philippe Petitclerc (Université Laval)

Philippe Petitclerc

Si tout est possible, l'impossible est-il possible ?

La linéarisation est un outil essentiel en théorie de l'approximation, intervenant dans diverses méthodes pour traiter des systèmes non linéaires. Par exemple, en méthodes numériques, la méthode de Newton permet d'approximer la solution d'un système d'équations non linéaires. En équations différentielles, on linéarise autour d'un point fixe pour simplifier l'étude des comportements locaux. De même, l'approximation d'une fonction par un développement de Taylor d'ordre un repose sur l'hypothèse d'un comportement linéaire local de la fonction. L'hypothèse est que localement, la fonction exprime un comportement linéaire. De manière similaire, dans le cadre des espaces vectoriels, on peut chercher une approximation par des sous-espaces linéaires. On essayerait alors **d'approximer** un espace vectoriel V_N de dimension N par un sous-ensemble V_n composé de **combinaisons linéaires** d'une base de dimension n. Possède-t-on des outils nous permettant de prédire la capacité d'approximation de tels espaces de dimension n ? Un outil fondamental est la largeur n-Kolmogorov qui nous donne une mesure de la qualité possible de l'approximation de V_N par V_n. Construisons ensemble cette métrique.

Soit un espace de dimension infinie V possédant une structure d'espace vectoriel et un produit scalaire qui définit une norme sur V. Soit V_N inclus dans V de dimension N et compact, et soit V_n inclus dans V_N de dimension n plus petit que N. Étant donné un élément v_N de V_N, définissons sa distance avec un V_n donné par :

$$d_1(v_N\,;V_n) = \inf_{v_n\in V_n} \|v_N - v_n\|_V. \tag{1}$$

La distance entre v_N élément de V_N et le sous-espace V_n est alors donnée par l'élément le plus proche de V_n à v_N, ce qui, j'espère, est intuitif. On quantifie la pire possible meilleure approximation de V_N par V_n par :

$$d_2(V_N\,;V_n) = \sup_{v_N\in V_N} d_1(v_N\,;V_n). \tag{2}$$

On observe alors que l'equation 2 nous renseigne sur la distance entre V_n et V_N puisqu'elle est déterminée par le pire scénario. Étant donné un V_n, l'equation 2 nous donne la distance de l'élément le moins bien approximé de V_N par V_n. La largeur n-Kolmogorov de V_N nous procure finalement la métrique recherchée, définissant l'espace qui minimise la distance à l'equation 2 :

$$\begin{aligned} d_n(V_N\,;V_n) &= \inf_{\substack{V_n\subset V_N\\ \dim(V_n)=n}} d_2(V_N\,;V_n)\\ &= \inf_{\substack{V_n\subset V_N\\ \dim(V_n)=n}} \sup_{v_N\in V_N} d_1(v_N\,;V_n)\\ &= \inf_{\substack{V_n\subset V_N\\ \dim(V_n)=n}} \sup_{v_N\in V_N} \inf_{v_n\in V_n} \|v_N - v_n\|_V \end{aligned} \tag{3}$$

En général, plus la largeur n-Kolmogorov est grande, moins l'espace V_N peut être bien approximé par un sous-espace de dimension n. En effet, cette quantité représente la meilleure précision possible dans la norme V quand tous les éléments de V_N sont approximés par des éléments d'un sous-espace linéaire V_n de dimension n. Cette métrique est très importante en théorie de la réduction de modèle et dans la théorie de l'approximation afin de trouver des espaces linéaires d'approximation de faible dimension.

CMS SMC

STUDC CMS SMC

Société mathématique du Canada — 616 Cooper St., Ottawa (ON) K1R 5J2, Canada