

Egan J Chernoff (University of Saskatchewan)

Notes Contributing Editor

Les Notes pédagogiques présentent des sujets mathématiques et des articles sur l'éducation aux lecteurs de la SMC dans un format qui favorise les discussions sur différents thèmes, dont la recherche, les activités les enjeux et les nouvelles d'intérêt pour les mathématicien.ne.s. Vos commentaires, suggestions et propositions sont les bienvenues.

Egan J Chernoff, University of Saskatchewan (egan.chernoff@usask.ca)

Kseniya Garaschuk, University of the Fraser Valley (kseniya.garaschuk@ufv.ca)

Toujours à la recherche de bons problèmes d'enseignement des mathématiques, et après des années et des années de recherche, je peux annoncer ouvertement que je suis criblé de bons (et d'autres) problèmes d'enseignement des mathématiques. Oui, je fais ici une distinction entre les bons *problèmes mathématiques* et les bons *problèmes d'enseignement des mathématiques*.

Au cours de ma quête perpétuelle, j'ai découvert que les bons problèmes mathématiques sont, pour la plupart, de bons problèmes d'enseignement des mathématiques (par exemple, le problème de Monty Hall). Cependant, et c'est ce qui a motivé cet article, de nombreux bons problèmes d'enseignement des mathématiques ne sont pas toujours de bons problèmes mathématiques. Par conséquent, les bons problèmes d'enseignement des mathématiques ne bénéficient pas toujours du même niveau d'attention que les bons problèmes mathématiques.

Éclairons donc ce que je considère comme un très bon problème d'enseignement des mathématiques. Je vous demande de bien vouloir me faire plaisir et de prendre un moment pour répondre à la question suivante :

Un cornet et une crème glacée coûtent ensemble 3,50 \$. Si la crème glacée coûte 3,00 \$ de plus que le cornet, combien coûte le cornet ?

Avec votre réponse en tête, je vous demande à nouveau votre indulgence et, si vous le souhaitez bien sûr, prenez un moment pour réfléchir à ce qui pourrait faire du problème du cornet et de la crème glacée un bon problème d'enseignement des mathématiques.

Pour que nous soyons tous sur la même longueur d'onde, la bonne réponse au problème ci-dessus est 25 cents. Pour être un peu plus précis, si le cornet coûte 0,25 \$, alors la crème glacée, qui coûte 3 \$ de plus que le cornet, coûterait 3,25 \$, et le cornet (0,25 \$) et la crème glacée (3,25 \$) ensemble (0,25 \$ + 3,25 \$) coûteraient 3,50 \$. Une solution simple à un problème apparemment simple.

Le plus étonnant, cependant, c'est que beaucoup de gens pensent, du moins au début, que la bonne réponse est 50 cents. Ce problème, désormais largement connu sous le nom de « problème de la batte et de la balle » (voir, par exemple, le livre de Kahneman, *Thinking, Fast and Slow*), avec différents chiffres et différents objets, existe depuis de nombreuses années dans le domaine de la psychologie. Le fait que notre intuition nous induise (une fois de plus) en erreur, vers une réponse mathématiquement incorrecte, est sans doute à l'origine de l'importance prise par le problème de la batte et de la balle dans le domaine de la psychologie. Je soutiens que ce célèbre « problème » psychologique est un bon problème mathématique.

L'un des arguments avancés pour obtenir la réponse incorrecte est que le supplément de 3 \$ pour la crème glacée est interprété comme étant (ou remplacé par) le coût de la crème glacée ; ainsi, si la crème glacée coûte 3 \$ et que le cornet et la crème glacée coûtent 3,50 \$, le cornet coûterait tout simplement 0,50 \$. En d'autres termes, si le cornet coûtait 0,50 \$ et la crème glacée 3,00 \$, alors oui, le cornet et la crème glacée coûteraient 3,50 \$ et tout serait parfait, sauf que ce n'est pas le cas. Comme le dit Red Auerbach, « Ce n'est pas ce que vous dites, c'est ce qu'ils entendent. » Même si les paroles de Red résonnent dans mes oreilles, je sais que le problème du cornet et de la crème glacée, un problème mathématique juste correct, est un bon problème d'enseignement des mathématiques.

Au-delà du fait de le savoir, je pourrais même argumenter que ce problème est un très bon problème d'enseignement des mathématiques. Je le sais parce que je pose chaque semestre le problème du cornet et de la crème glacée aux futurs enseignants de mathématiques du primaire. En classe, après avoir d'abord tenté de répondre eux-mêmes au problème du cornet et de la crème glacée, les étudiants sont répartis en groupes de trois et chargés de m'expliquer, en incarnant quelqu'un qui « ne comprend tout simplement pas », pourquoi la réponse au problème n'est pas 50 cents ! En parcourant la salle, en observant et en écoutant les étudiants qui peinent à expliquer et à comprendre le problème et la solution, je découvre une facette étrange de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques qui, pour moi, est au cœur même d'un bon problème d'enseignement des mathématiques.

En général, après mon premier essai, j'attire l'attention de la classe pour dire à tout le monde que me dire que la bonne réponse est 25 cents, mais que le faire à un volume plus élevé et sur un ton plus agressif chaque fois que je leur dis « Je ne comprends pas... » n'est pas la meilleure stratégie d'enseignement au monde. Je leur dis également que même s'ils peuvent se sentir à l'aise avec l'approche de John von Neumann (à savoir « En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue simplement ») dans leurs futurs cours de mathématiques, ce n'est pas une méthode d'enseignement acceptable pour m'expliquer que la réponse au problème du cornet et de la crème glacée n'est pas cinquante cents. « Essayons encore une fois... », dis-je.

Ma deuxième tournée dans la salle ressemble à l'observation de tigres trouvant leurs rayures. La table « nous aimons l'algèbre » apparaît rapidement, par exemple. Ils m'appellent fièrement pour me montrer qu'ils ont défini une variable et que « Soit x » (et non c) le coût, en dollars, du cornet. C'est bien, leur dis-je, mais je leur explique aussi que ce n'est qu'une autre façon de donner la bonne réponse, bien que de manière plus formelle (pour eux) car l'algèbre entre désormais en jeu. La table « pas 50 cents » apparaît également. Me montrant quelques calculs approximatifs, ils me demandent de suivre leurs explications selon lesquelles cinquante cents, combinés à trois dollars et cinquante cents, font quatre dollars. Cherchant à obtenir une réaction de ma part à ce stade, j'indique au groupe qu'il est toujours bon de se demander « Que pensez-vous qu'ils ont pensé ? ». Ce que je recherche vraiment lors de mon deuxième tour, cependant, ce sont ces personnes courageuses, celles qui admettent qu'elles ne comprennent toujours pas la solution, ce qui est essentiel pour mon troisième et dernier tour dans la salle.

Une fois de plus, j'attire l'attention de toute la salle et je fais remarquer que notre classe semble être dans une bonne position. Certains groupes m'ont démontré de manière convaincante que la bonne réponse est 25 cents. D'autres groupes m'ont également démontré de manière convaincante que la réponse n'est pas 50 cents. Le seul problème, dis-je à la classe, c'est que même si beaucoup d'entre eux débordent désormais de confiance, il y a encore quelques individus qui, il faut l'admettre, ne voient pas encore ce qu'ils voient. Je demande donc à chaque groupe d'élaborer un plan, une stratégie, une approche, une méthode (peu importe le nom qu'ils lui donnent) pour aider à comprendre comment quelqu'un est arrivé à la mauvaise réponse, puis pour aider cette même personne à passer de

sa mauvaise réponse (50 cents ou une autre réponse) à la bonne réponse (25 cents).

De temps à autre, ma foi dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques est restaurée. Avoir une salle remplie de futurs professeurs de mathématiques, tous en train d'élaborer un plan pour aider chacun d'entre eux à comprendre la solution au problème du cornet et de la glace, est l'un de ces moments. Cependant, ce n'est pas leur aide et leur attention qui restaurent ma foi. C'est la manière dont ils s'y prennent.

Dans le cadre d'une approche appelée « Boucle d'or et les cinq exemples », les groupes commencent par créer des tableaux clairs et précis montrant que le cornet ne peut pas coûter, par exemple, une cenne. Dans ce cas, le cornet (une cenne) et la crème glacée (trois dollars et une cenne) coûteraient ensemble 3,02 \$. Ensuite, ils démontrent que le cornet ne peut pas coûter dix cents, car le cornet (dix cents) et la crème glacée (trois dollars et dix cents) coûteraient ensemble 3,20 \$. En laissant un espace vide au milieu du tableau (pour 25 cents), les groupes démontrent ensuite comment le cône coûtant 35 cents, 50 cents ou un dollar ferait que le coût final, en prenant le cône et la crème glacée ensemble, serait respectivement de 3,70 \$, 4,00 \$ et 5,00 \$. J'ai posé la question. Pour certains, voir la ligne vide bien visible au milieu du tableau a été essentiel pour comprendre, en particulier en voyant 0,35 \$. Pour d'autres, voir la colonne avec 3,02 \$, 3,20 \$, 3,70 \$, 4,00 \$ et 5,00 \$, en particulier lorsqu'elle est présentée sous la forme 3,02 \$ (0,01 \$ + 3,01 \$), 3,20 \$ (0,10 \$ + 3,10 \$), 3,70 \$ (0,35 \$ + 3,35 \$), 4,00 \$ (0,50 \$ + 3,50 \$) et 5,00 \$ (1,00 \$ + 4,00 \$), a été déterminant pour comprendre. Pour moi, il est intéressant de constater que les futurs enseignants de mathématiques s'appuient sur une approche intuitive de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques pour obtenir, dès le début de leur carrière, un certain succès.

Il serait difficile de me convaincre que les 5 à 10 minutes nécessaires pour que tous les futurs enseignants de mathématiques du primaire acceptent la solution correcte au problème du cornet et de la crème glacée ne valent pas la peine. Tout le monde, sans doute, tire profit du temps consacré à ce problème. Outre les avantages pour les étudiants, comme je l'ai mentionné, cela me redonne foi dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, mais pas parce que les étudiants montrent qu'ils s'y intéressent. Les étudiants sont de futurs enseignants, bien sûr qu'ils s'y intéressent. Ma foi est plutôt restaurée parce que, associé à un problème mathématique qui induit notre intuition en erreur, il pourrait y avoir mathématiquement une autre intuition en jeu, une intuition de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, qui nous aide à combattre notre réponse mathématiquement incorrecte, qui découle (une fois de plus) de notre intuition qui nous induit en erreur. L'intuition contre l'intuition ?!

En fin de compte, les bons problèmes d'enseignement des mathématiques concernent certes les mathématiques, mais ils ouvrent aussi facilement une fenêtre sur le monde de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Si vous avez un bon problème d'enseignement des mathématiques, nous aimerions bien en entendre parler, ici, dans la section « Notes pédagogiques » des Notes de la SMC. Bien que je sois moi-même submergé de bons problèmes d'enseignement des mathématiques, Kseniya et moi-même ne souhaiterions rien de mieux que de voir les pages des Notes pédagogiques également remplies de bons problèmes d'enseignement des mathématiques. Une vitrine, en quelque sorte.

Droits d'auteurs & autorisations

La Société mathématique du Canada autorise les lecteurs individuels de cette publication à copier les articles pour leur usage personnel. L'utilisation à d'autres fins est strictement interdite. Pour obtenir une licence autre que la copie d'articles à des fins personnelles, veuillez contacter la Société mathématique du Canada pour demander des autorisations ou des conditions de licence.