

Fonctions et fonctions inverses : réponse

Notes pédagogiques

Novembre 2025 (tome 57, no. 5)

Andie Burazin (University of Toronto Mississauga)

Miroslav Lovrić (McMaster University)

Les Notes pédagogiques présentent des sujets mathématiques et des articles sur l'éducation aux lecteurs de la SMC dans un format qui favorise les discussions sur différents thèmes, dont la recherche, les activités les enjeux et les nouvelles d'intérêt pour les mathématicien.ne.s. Vos commentaires, suggestions et propositions sont les bienvenues.

Egan J Chernoff, University of Saskatchewan (egan.chernoff@usask.ca)

Kseniya Garaschuk, University of the Fraser Valley (kseniya.garaschuk@ufv.ca)

Votre professeur arrive en classe et dit : « Aujourd'hui, nous allons parler des anneaux. » Quelle est votre première réaction ? Perplexe, vous réfléchissez et vous avez envie de demander : « Que voulez-vous dire ? » Que pourrait bien être cet « anneau » ? Peut-être que le professeur pense aux anneaux de Saturne, ou peut-être parle-t-il d'un anneau de boxe, un anneau de fiançailles... ou peut-être à l'anneau du *Seigneur des Anneaux*. Vous vous grattez la tête... Peut-être s'agit-il d'un anneau commutatif, d'un anneau comme la région entre des cercles concentriques, ou d'un anneau borroméen ; ou encore d'un modèle en anneau comme dans une configuration circulaire de neurones dans un réseau ? L'annonce de votre professeur est pour le moins *ambigüe* !

Cet article est une réponse à l'article « On invertible functions and on functions in general » publié dans les Notes de la SMC (juin 2025), qui souligne l'importance de la définition initiale d'une fonction et des conditions nécessaires à l'inversibilité d'une fonction.

Un peu de contexte. En tant qu'éducateurs (en particulier ceux d'entre nous qui sont impliqués dans la formation des enseignants du primaire et du secondaire et dans la recherche sur l'enseignement supérieur), nous discutons régulièrement de situations qui impliquent des *ambiguités*, des *imprécisions*, des *imprécisions* ou des *énoncés incomplets* en mathématiques. Par exemple, l'exposant -1 peut désigner une fonction réciproque ou inverse (le fait que $\sin^{-1} x$ puisse signifier $\csc x$ ou $\arcsin x$ peut être source de confusion). La signification du terme « multiplication » dépend du contexte (produit de nombres réels, de fonctions, de matrices, produit scalaire, etc.), ce qui signifie que nous devons être vigilants et toujours nous demander « que se passe-t-il ici ? ». Aborder de telles situations avec nos élèves pourrait mener à des discussions productives, qui approfondiraient leur compréhension. Affirmer que $0.999 \dots$ est égal à 1 implique de se demander « que signifie réellement $0.999 \dots$? », puis d'utiliser les outils appropriés (série géométrique) pour trouver la réponse.

Jusqu'ici, tout va bien – alors quel est le problème (c'est-à-dire, pourquoi cette réponse) ? La question que nous posons est la suivante : « Jusqu'où devons-nous aller au-delà de l'identification des ambiguïtés et de la discussion de leur valeur pédagogique, c'est-à-dire à quel moment passons-nous de la remise en question des définitions disponibles au choix de celle avec laquelle nous allons travailler ? » Pour illustrer cela, nous nous penchons sur Tsamir et Tirosh (2025), qui opposent les définitions concurrentes suivantes :

Définition 1 : Une fonction f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ chaque fois que $x_1 < x_2$.

Définition 2 : Une fonction f est dite croissante si $f(x_1) < f(x_2)$ chaque fois que $x_1 < x_2$

Les auteurs utilisent des exemples (et des contre-exemples) pour illustrer les différences entre les deux définitions, et c'est là que s'arrête leur récit. Bien sûr, quiconque enseigne le calcul différentiel ne peut se permettre de s'arrêter là : il doit choisir une définition afin de pouvoir avancer et continuer à développer des concepts mathématiques.

En enseignement des mathématiques, il existe un concept appelé « connaissance du contenu horizon », souvent abrégé en HCK. Le principe de base (adapté à notre argumentation) est que, lorsque nous sommes confrontés à une décision (comme ci-dessus : définition 1 ou définition 2 ?), nous regardons vers l'avenir, c'est-à-dire que ce qui se passe plus tard (dans notre cours ou dans un manuel) influence les décisions que nous devons prendre maintenant. Comme nous voulons affirmer que les fonctions croissantes sont inversibles (ce qui, si l'on regarde plus loin, est également un théorème en analyse), nous devons adopter la définition 2 (et c'est ce que font les manuels de calcul).

Face à des ambiguïtés, nous devons tenir compte du contexte et de l'objectif. Cela signifie non seulement « rétroconcevoir » le matériel ou décider de ce qui est important ou pertinent, mais aussi garder à l'esprit qui est notre public (étudiants en mathématiques et en statistiques, étudiants en sciences de la vie, ingénieurs, étudiants en économie, etc.).

Zazkis (2025) oppose deux définitions d'une fonction, identifiées comme la définition de la paire ordonnée (Halmos, 1960) et la définition triple de Bourbaki (Bourbaki, 1968), en commentant que « bien que la similitude soit évidente, une différence notable réside dans la mention explicite du domaine et du codomaine dans la « définition triple » ».

Halmos (1960) définit une fonction comme une relation (p. 30) ; auparavant, en parlant des relations (p. 27), il définit deux ensembles associés : le domaine et l'image d'une relation. Ainsi, même si cela n'est pas explicitement mentionné, une fonction est associée à un domaine et à une image. La triple définition de Bourbaki conceptualise une fonction comme un triplet (D, F, E) , où D et E sont des ensembles et F est un sous-ensemble de $D \times E$ avec la propriété que pour chaque $x \in D$ il existe un unique $y \in E$ tel que $(x, y) \in F$.

La résolution de la question soulevée (Quelles conditions garantissent l'inversibilité d'une fonction ?) peut être obtenue en lisant attentivement les deux références. La définition d'une fonction comme relation donnée par Halmos (1960) signifie qu'une fonction est surjective (c'est-à-dire sur son image), et donc que seule la bijection est nécessaire. La définition de Bourbaki stipule que E est le codomaine (et non l'image), et donc que la surjectivité et l'injection sont toutes deux nécessaires. (Nous sommes conscients d'avoir omis certaines subtilités qui pourraient déplaire aux spécialistes de la philosophie des mathématiques.)

Cette discussion, jusqu'à présent (c'est-à-dire la comparaison entre les définitions de Halmos et de Bourbaki), n'est pas quelque chose que nous pouvons mener dans la plupart de nos cours de mathématiques de première année à l'université. Cependant, comme elle soulève des questions intéressantes, nous allons maintenant transposer cette discussion dans le contexte du calcul.

Une définition courante d'une fonction en calcul est la suivante.

Définition 3. Une fonction f est une règle qui associe à chaque élément x d'un ensemble D exactement un élément, appelé $f(x)$, d'un ensemble E . (Stewart et al., 2021, p. 8)

Le contenu présenté avant cette définition (il n'est jamais bon de lire une définition isolément) nous apprend que D et E sont des sous-ensembles non vides de l'ensemble des nombres réels. L'ensemble D est appelé le domaine de f . Certains manuels ne nomment pas explicitement l'ensemble E le codomaine de f (même s'ils utilisent la notation $f: D \rightarrow E$); cependant, tous les manuels de calcul définissent l'image de f comme l'ensemble $f(D)$ de toutes les valeurs $f(x)$ pour x dans le domaine D de f .

À partir de cette définition, il est clair que si $f: D \rightarrow E$ n'est pas nécessairement surjective, la fonction $f: D \rightarrow f(D)$ est toujours surjective. Ainsi, l'énoncé suivant est vrai.

Théorème 1. Supposons qu'une fonction $f: D \rightarrow E$ soit bijective. Alors f a une fonction inverse g définie sur $f(D)$. (modifié d'après Stewart et al., 2021, p. 55)

En étudiant les ambiguïtés concernant les conditions nécessaires pour qu'une fonction ait une fonction inverse, Mirin et al. (2020, p. 23) soulèvent la question de savoir si $f(x) = e^x$ est inversible ou non (car elle n'est pas surjective sur \mathbf{R}). En gardant à l'esprit le théorème 1, une réponse possible est que la fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^x$ (qui est croissante et donc bijective) a pour fonction inverse g (à savoir $g(x) = f^{-1}(x) = \ln x$) définie sur $f(\mathbf{R}) = (0, \infty)$.

Zazkis (2025) conclut son article en se demandant si les fonctions $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, définie par $g(x) = x^2$, et $h: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$, définie par $h(x) = x^2$, sont égales. Bien sûr, tout dépend de la définition que l'on utilise.

Définition 4. Deux fonctions $f_1: D_1 \rightarrow E_1$ et $f_2: D_2 \rightarrow E_2$ sont dites égales si leur domaine D_1 et D_2 sont égaux, leurs images $f(D_1)$ et $f(D_2)$ sont égales, et $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout x dans $D_1 = D_2$.

Définition 5. Deux fonctions $f_1: D_1 \rightarrow E_1$ et $f_2: D_2 \rightarrow E_2$ sont dites égales si leur domaine D_1 et D_2 sont égaux, leurs images E_1 et E_2 sont égales, et $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout x dans $D_1 = D_2$.

Bien que la définition 4 soit couramment utilisée en calcul, elle n'est pas toujours explicitement mentionnée ; par exemple, elle n'apparaît pas dans Stewart et al. (2021). Selon la définition 4, les deux fonctions g et h sont égales (nous n'utilisons pas le terme « équivalentes » utilisé par Zazkis (2025)). Cependant, cela pourrait ne pas nous satisfaire, car h est surjective, mais g ne l'est pas. Si nous voulons remédier à cela, nous devons adopter la définition 5, qui implique que g et h sont deux fonctions différentes.

Il existe un autre aspect important de la définition des fonctions égales : l'égalité de leurs domaines. Par exemple, les fonctions $\ln x^2$ et $2 \ln x$ ne sont égales que lorsqu'elles sont considérées comme des fonctions avec le domaine $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. L'énoncé $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ est incorrect, sauf si nous précisons que $x \neq 1$. La formule $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ n'est valable que pour $|x| < 1$. Et ainsi de suite.

Comme nous le savons tous, les mathématiques sont une science infinie. Nous ne considérons donc pas cet article comme une conclusion, mais plutôt comme une invitation à approfondir ces questions (et d'autres).

Références

- Bourbaki, N. (1968). *Theory of Sets*. Don Mills, ON: Addison-Wesley Publishing.
- Halmos, P.R. (1960). *Naive Set Theory*. Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company.
- Mirin, A., Milner, F., Wasserman, N., & Weber, K. (2020). On two definitions of ‘function’. *For the learning of mathematics*, 41(3), 21-24.
- Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2021). *Calculus, Early Transcendentals, 9th Edition*. Boston, MA, USA: Cengage.
- Tsamir, P. & Tirosh, D. (2025). Nonequivalent definitions: anecdotal incidents or an ordinary constancy? *For the Learning of Mathematics*, 45(1), 39-44.
- Zazkis, R. (2025). On invertible functions and on functions in general *Canadian Mathematical Society Notes*, 37(3).
-

Droits d'auteurs & autorisations

La Société mathématique du Canada autorise les lecteurs individuels de cette publication à copier les articles pour leur usage personnel. L'utilisation à d'autres fins est strictement interdite. Pour obtenir une licence autre que la copie d'articles à des fins personnelles, veuillez contacter la Société mathématique du Canada pour demander des autorisations ou des conditions de licence.

[Société mathématique du Canada](#) — 616 Cooper St., Ottawa (ON) K1R 5J2, Canada