

George Grätzer

(« Ne demandez pas ce que votre pays peut faire pour vous,
Demandez ce que vous pouvez faire pour votre pays. »)
John F. Kennedy, 1961

Comme l'illustrent les parties I et II, ChatGPT peut s'avérer extrêmement utile pour la recherche et la rédaction mathématiques. Vous devez toutefois toujours faire preuve de prudence face aux conseils qu'il vous donne. N'oubliez pas : c'est à vous qu'il incombe de vous assurer de l'exactitude de votre article.

Cet article présente des exemples de situations dans lesquelles ChatGPT induit en erreur. Chaque exemple est présenté sous la forme d'une requête, d'une réponse de ChatGPT et d'une brève analyse expliquant l'erreur et comment la détecter.

Vérifiez tout. Que ce soit votre principe directeur : ChatGPT est un assistant, pas un oracle.

1. UN LEMME ERRONÉ

Commande.

Soit L un treillis modulaire fini. Si a est irréductible par jonction et que $a \leq b \vee c$, faut-il que $a \leq b$ ou que $a \leq c$?

Réponse de ChatGPT.

Oui.

Puisque a est irréductible par jonction, il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une jonction non triviale. À partir de $a \leq b \vee c$, la modularité permet de distribuer l'inégalité sur la jonction. Si $a \not\leq b$ et $a \not\leq c$, alors a se décomposerait en une jonction d'éléments plus petits, ce qui contredirait l'irréductibilité par jonction. Par conséquent, soit $a \leq b$, soit $a \leq c$.

Analyse.

Cette affirmation est fausse. Elle est vraie dans les treillis *distributifs* finis, mais fausse dans les treillis modulaires en général.

Soit $L = M_3$. Soit a l'un des trois atomes, et soit b et c les deux autres atomes. Alors

$$a \leq b \vee c = 1,$$

mais

$$a \not\leq b \text{ et } a \not\leq c.$$

ChatGPT remplace silencieusement la distributivité par la modularité. L'argument se lit correctement mais prouve un théorème différent.

2. UN DIAGRAMME DONT LA GÉOMÉTRIE MENT

Commande.

Dessine un diagramme d'un ensemble ordonné avec ses éléments

$$0 < a < c < 1,$$

$$0 < a < d < 1,$$

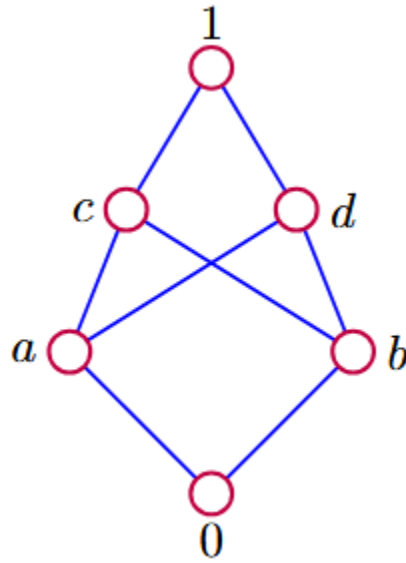
$$0 < b < c < 1,$$

$$0 < b < d < 1,$$

où a et b ne sont pas comparables, et c et d ne sont pas comparables. Utilisez une disposition symétrique.

Réponse de ChatGPT.

Voici le code TikZ correspondant au diagramme demandé :



Analyse. D'un point de vue formel, toutes les arêtes requises sont présentes et aucune relation de recouvrement ne manque. Le code se compile et le diagramme semble clair et symétrique.

Le problème est d'ordre géométrique. Comme c est placé au-dessus et à gauche de b , et d au-dessus et à droite de a , l'image suggère

$$b < d \text{ et } a < c,$$

alors qu'aucune de ces relations n'est voulue. L'œil lit naturellement les chaînes

$$0 < a < c < 1 \text{ et } 0 < b < d < 1,$$

ce qui contredit les incomparabilités voulues $a \parallel c$ et $b \parallel d$.

3. UNE INSTRUCTION *LaTeX* QUI GÉNÈRE UNE ERREUR

Commande.

La compilation s'arrête avec l'erreur Environment example undefined. Comment puis-je résoudre ce problème ?

Réponse de ChatGPT.

Ajoutez `\usepackage{example}` dans le préambule pour définir l'environnement.

Analyse. Il n'existe pas de package standard définissant un environnement exemple. La solution proposée ne résout pas l'erreur.

La solution consiste à définir explicitement l'environnement ou à le remplacer par un environnement existant de type théorème. Le message d'erreur lui-même identifie déjà le problème.

4. UN THÉORÈME CORRECT ACCOMPAGNÉ D'UNE PREUVE INCORRECTE

Commande.

Soit L un treillis fini. Supposons que tout élément irréductible par jonction de L soit premier par jonction. [1] Démontrez que L est distributif.

Réponse de ChatGPT.

Soit L un treillis fini dans lequel tout élément irréductible par jonction est premier par jonction. Comme L est fini, tout élément peut s'écrire sous la forme d'une jonction d'éléments irréductibles par jonction. Soient $x, y, z \in L$.

Soit $x = a_1 \vee \dots \vee a_n$, où chaque a_i est irréductible par jonction. Alors

$$x \wedge (y \vee z) = (a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge (y \vee z).$$

Si $a_i \leq y \vee z$, alors, puisque a_i est premier par jonction, on a $a_i \leq y$ ou $a_i \leq z$. Ainsi

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

et L est distributif.

Analyse. Le théorème est correct. La preuve ne l'est pas.

L'erreur cruciale se trouve dans la première équation présentée. Le raisonnement suppose implicitement que

$$(a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge t = (a_1 \wedge t) \vee \dots \vee (a_n \wedge t),$$

ce qui constitue déjà une forme de distributivité. La démonstration utilise donc la conclusion pour se justifier elle-même.

La primalité des jonctions ne s'applique qu'aux inégalités de la forme $a \leq x \vee y$. Elle ne fournit aucune justification pour distribuer les intersections sur les jonctions. Le raisonnement confond une propriété d'ordre des éléments individuels avec une identité algébrique du treillis.

Une preuve correcte procède en analysant des représentations de jonctions non redondantes et en les comparant élément par élément, plutôt qu'en manipulant des identités de treillis.

Cette erreur est dangereuse pour plusieurs raisons :

- le théorème lui-même est vrai,
- le schéma de la preuve semble classique,
- aucune étape n'est manifestement fautive,
- et le cercle vicieux est profondément dissimulé.

5. UNE ERREUR STRUCTURELLE PROFONDE

Commande.

Soit L un treillis fini. Supposons que tout élément irréductible par jonction de L soit premier par jonction, c'est-à-dire que

$$a \leq x \vee y \Rightarrow a \leq x \text{ ou } a \leq y \text{ pour tout } x, y \in L.$$

Montrez que L est distributif.

Réponse de ChatGPT.

Soit L un treillis fini dans lequel tout élément irréductible par jonction est premier par jonction. Puisque L est fini, tout élément peut s'écrire sous la forme d'une jonction d'éléments irréductibles par jonction. Soient $x, y, z \in L$.

Nous démontrons la distributivité. Considérons $x \wedge (y \vee z)$. Écrivons $x = a_1 \vee \dots \vee a_n$ sous la forme d'une jonction d'éléments irréductibles par jonction. Alors

$$x \wedge (y \vee z) = (a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge (y \vee z).$$

Par primalité de la jonction, pour chaque a_i , on a $a_i \leq y \vee z$, ce qui implique $a_i \leq y$ ou $a_i \leq z$. Par conséquent

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

donc L est distributif.

Analyse. La conclusion est correcte : un treillis fini dans lequel chaque élément irréductible par jonction est premier par jonction est distributif. Cependant, le raisonnement ci-dessus n'est pas valable.

L'erreur est subtile. Elle se produit lors du passage de la propriété de primalité par jonction d'éléments individuels irréductibles par jonction à une identité distributive impliquant des jonctions et des intersections arbitraires.

L'étape clé non justifiée est l'affirmation implicite selon laquelle

$$(a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge (y \vee z) = (a_1 \wedge (y \vee z)) \vee \dots \vee (a_n \wedge (y \vee z)),$$

ce qui suppose déjà la distributivité. La démonstration utilise la distributivité pour établir la distributivité.

Plus concrètement, la propriété de primalité des unions ne s'applique qu'aux inégalités de la forme $a \leq x \vee y$. Elle ne dit rien sur la manière dont les intersections se distribuent sur des unions arbitraires. L'argument traite tacitement \wedge comme si elle se distribuait sur \vee à gauche, ce qui est précisément ce qu'il faut prouver.

Cet exemple est particulièrement instructif pour plusieurs raisons :

- le théorème lui-même est vrai,
- le schéma de la démonstration semble classique,
- chaque phrase est en soi plausible,
- et l'erreur ne se situe qu'au niveau de la structure algébrique.

6. UN EXEMPLE TYPE DE CLASSIFICATION ERRONÉE

Commande.

Donnez un exemple de treillis modulaire fini qui n'est pas distributif. Citez un treillis standard, décrivez son diagramme et expliquez pourquoi il est modulaire mais non distributif.

Réponse de ChatGPT.

Un exemple classique est le réseau N_5 (le réseau pentagonal). Il comporte les éléments $0, a, b, c, 1$ disposés de telle sorte que 0 se trouve sous a et b , a sous c , et b et c tous deux sous 1 . Ce réseau est modulaire mais non distributif.

La modularité découle du fait qu'il n'existe aucun sous-treillis isomorphe à M_3 . La non-distributivité est mise en évidence par l'échec de la loi distributive pour le triplet (a, b, c) . Ainsi, N_5 est un treillis fini, modulaire et non distributif.

Analyse. La classification est erronée. Parmi les deux réseaux classiques à cinq éléments, seul M_3 est modulaire et non distributif. Le réseau pentagonal N_5 est *le plus petit réseau non modulaire*.

L'argument ne fait qu'aggraver cette erreur. Il « prouve » la modularité de N_5 en invoquant l'absence d'un sous-réseau M_3 , alors même que N_5 est le contre-exemple classique de la mo-

dualité. L'argument selon lequel « il n'y a pas de M_3 » semble faire autorité, mais il est factuellement faux.

Cet exemple illustre un autre type d'erreur. La réponse présente les caractéristiques suivantes :

- elle utilise une notation familière (M_3 , N_5),
- elle cite une caractérisation standard (sous-treillis interdits),
- et elle fournit une preuve informelle fluide.

Pourtant, elle attribue une étiquette erronée à l'un des petits treillis les plus connus dans ce domaine.

7. CONCLUSION

Dans tous les exemples ci-dessus, la réponse de ChatGPT est fluide, assurée et plausible. Dans tous les cas, elle est erronée.

La vérification n'est donc pas facultative. Elle constitue un élément essentiel de toute utilisation mathématique sérieuse de ChatGPT.

[1] Un élément $p \in L$ est dit « premier par jonction » si, pour tout $x, y \in L$,

$p \leq x \vee y$ implique que $p \leq x$ ou $p \leq y$.

Droits d'auteurs & autorisations

La Société mathématique du Canada autorise les lecteurs individuels de cette publication à copier les articles pour leur usage personnel. L'utilisation à d'autres fins est strictement interdite. Pour obtenir une licence autre que la copie d'articles à des fins personnelles, veuillez contacter la Société mathématique du Canada pour demander des autorisations ou des conditions de licence.

Société mathématique du Canada — 616 Cooper St., Ottawa (ON) K1R 5J2, Canada