Notes de la SCHPM Mars 2026 (tome 58, no. 2)

Ascétisme cognitif et paradoxes

Thomas Drucker (University of Wisconsin–Whitewater)

CSHPM Notes brings scholarly work on the history and philosophy of mathematics to the broader mathematics community. Authors are members of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics (CSHPM). Comments and suggestions are welcome; they may be directed to the column's editors:
Amy Ackerberg-Hastings, *independent scholar (aackerbe@verizon.net)*
Nicolas Fillion, *Simon Fraser University (nfillion@sfu.ca)*

« C'est une vérité universellement reconnue qu'un célibataire pourvu d'une belle fortune doit avoir envie de se marier. » C'est par cette généralisation que Jane Austen commence *Orgueil et Préjugés*. L'assurance avec laquelle elle l'affirme donne au lecteur l'impression qu'elle a toutes les raisons de le faire. On pourrait presque parler d'un théorème social.

En général, la littérature ne regorge pas du genre d'énoncés que l'on trouve en mathématiques : théorèmes, corollaires, lemmes ou axiomes. Il existe toutefois une exception à cette règle : les paradoxes. La question est de savoir si les paradoxes présents dans la littérature et ailleurs sont de même nature que ceux des mathématiques. Cet article vise à démontrer que les réactions face aux paradoxes dans d'autres domaines peuvent s'avérer utiles pour aborder certains paradoxes mathématiques.

Le mot « paradoxe » n'a rien de particulièrement mathématique. Tout comme « orthodoxe » désigne une « croyance juste » et « hétérodoxe » une « croyance différente », « paradoxe » désigne ce qui est « au-delà de la croyance » (le préfixe « para » a de multiples applications). Ce mot est d'une antiquité vénérable, et les exemples abondent, même à l'époque grecque. Anthony Gottlieb, par exemple, évoque le style « paradoxal » d'Héraclite, illustré par des dictons tels que « La route qui monte et la route qui descend sont la même route » [4, p. 41]. Encore plus connue est l'histoire de Socrate, qui fut perplexe face au verdict de l'oracle de Delphes selon lequel il était le plus sage de tous les Grecs. Il était conscient du peu qu'il savait, mais dans ses conversations avec les autres, ceux-ci semblaient toujours prétendre posséder plus de connaissances qu'ils n'en avaient réellement.

Figure 1. Capture d'écran d'un Socrate vraisemblablement généré par IA, signalant une erreur de traduction tirée de *Apology*, 21d. YouTube video by thevoiceofsocrates, 28 novembre 2025.

Il y a eu des périodes dans la littérature anglaise où les paradoxes semblaient être à l'ordre du jour. À la fin du XIXe siècle, Oscar Wilde et George Bernard Shaw ont diverti les spectateurs avec une multitude de paradoxes, pièce après pièce. En dehors du théâtre, G.K. Chesterton a largement utilisé cet outil dans la critique littéraire et même en théologie. Plus récemment, Jorge Luis Borges a créé des récits entiers sous forme de paradoxes, par exemple « La Bibliothèque de Babel » [2, passim]. L'une des chansons populaires de *The Pirates of Penzance*, un opéra de Gilbert et Sullivan, s'appuie sur un paradoxe lié aux anniversaires et aux années bissextiles.

La religion est depuis longtemps confrontée au paradoxe, et la phrase attribuée à Tertullien (« Credo quia absurdum » — « J'y crois parce que c'est absurde ») fait partie intégrante de la théologie chrétienne depuis des siècles. Dans la tradition bouddhiste, les koans semblent souvent n'être rien d'autre que des paradoxes. Dans son ouvrage *Gödel, Escher, Bach*, Douglas Hofstadter consacre plusieurs chapitres aux koans et à leur non-interprétabilité [5]. Dans son ouvrage *The Uses of Paradox* [1], Matthew Bagger propose une manière d'aborder les paradoxes dans un contexte religieux, qui sera reprise à la fin de cet article.

Les paradoxes mathématiques ont eu des répercussions diverses. Les conséquences du paradoxe de Russell (l'impossibilité de déterminer si l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas des éléments d'eux-mêmes est un élément de lui-même) sur le projet de Frege dans ses *Grundgesetze* sont bien connues. On peut soutenir que le succès de Gödel, qui a réussi à démolir les *Principia Mathematica*, reposait sur un paradoxe tel que celui du menteur. Le paradoxe de Banach-Tarski, en revanche, n'a pas nécessité de réécrire les mathématiques. Sa conclusion (selon laquelle on peut découper une boule en un nombre fini de morceaux puis les réassembler pour obtenir une boule deux fois plus grande que la boule d'origine) va à l'encontre du bon sens, mais la plupart d'entre nous ne disposons pas du genre de bon sens capable de faire face à des couteaux infiniment fins. En revanche, le paradoxe du menteur continue de susciter des réponses philosophiques. Certains ont fait valoir que le problème avec « Cette affirmation est fausse » réside dans son caractère autoréférentiel, mais les versions proposées par Quine et Yablo, entre autres, semblent soulever le même problème sans l'autoréférence [6, p. 9 ; 3, pp. 50–51].

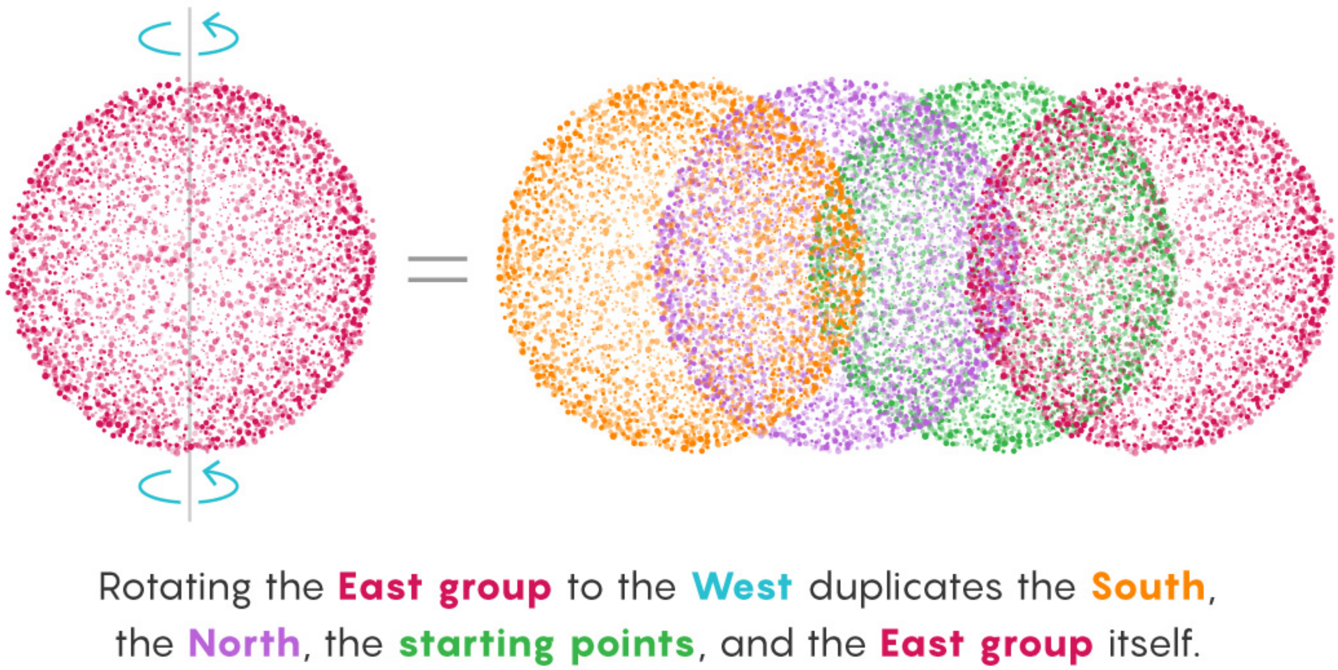

Figure 2. Une illustration du paradoxe de Banach-Tarski. Illustration de Samuel Velasco pour Max G. Levy, "Banach-Tarski and the Paradox of Infinite Cloning," *Quanta Magazine*, 26 août 2021.

Qu'est-ce qui rend une chose paradoxale ? La collision avec le bon sens prend généralement la forme d'une surprise. Il y a souvent une certaine dose d'humour à voir comment le bon sens doit apprendre à s'adapter aux calculs. La probabilité offre un certain nombre de paradoxes de ce type, tels que le problème de l'anniversaire (il suffit de 23 personnes dans un groupe pour que la probabilité d'avoir un anniversaire en commun soit supérieure à 1/2) ou le paradoxe de Simpson (ce qui est vrai pour tous les sous-ensembles pris individuellement peut ne plus l'être lorsqu'ils sont agrégés).

Une analogie plausible pourrait être la situation concernant l'hypothèse du continuum. Gödel a pu démontrer que si l'on ajoutait un certain axiome aux axiomes standard de la théorie des ensembles, le système ainsi obtenu était capable de prouver que l'hypothèse du continuum (il n'y a pas d'infini entre le nombre des entiers et celui des réels) est vraie. Puis Paul Cohen a démontré que si l'on ajoutait un axiome différent aux axiomes standard, le système ainsi obtenu était capable de montrer que l'hypothèse du continuum était fausse. Dans les deux cas, il a été démontré que les axiomes supplémentaires étaient cohérents avec les axiomes standard.

Ce conflit soulève un autre problème qui ne se posait pas dans le cas des géométries euclidienne et non euclidienne. En tant que mathématiques pures, elles peuvent être tout aussi légitimes l'une que l'autre, mais lorsqu'il s'est agi de les confronter à la structure de l'univers, c'est la géométrie non euclidienne qui l'a emporté. Il n'existe pas d'univers évident pouvant servir d'arbitre pour les axiomes qui se rapportent aux ensembles infinis.

En réalité, l'infini est depuis longtemps source de paradoxes — ce que l'on peut attribuer à l'incapacité du bon sens à appréhender l'infini. La démonstration selon laquelle des ensembles infinis peuvent avoir des sous-ensembles propres de même cardinalité nous empêche de nous rabattre sur la notion euclidienne selon laquelle le tout est plus grand que la partie. Il y a assurément aussi quelque chose de paradoxal dans les théorèmes de Löwenheim-Skolem, même si nous ne les qualifions pas de paradoxes. Ils affirment, après tout, que si un ensemble d'axiomes possède un modèle non dénombrable, alors il possède également un modèle dénombrable, et si cela ne va pas à l'encontre de notre conception courante de l'infini, je ne sais pas ce qui le ferait. Le fait que la cardinalité dépende de la méthode utilisée pour trouver des correspondances biunivoques donne l'impression que la taille d'un ensemble pourrait dépendre de l'ordre dans lequel on en dénombre les éléments.

Figure 3. Un dessin de 1880 représentant le « trio du paradoxe » de l'acte II de *Les Pirates de Penzance*, dans lequel le Roi des Pirates et Ruth tiennent Frédéric en joue tout en lui expliquant le paradoxe lié au fait qu'il soit né un 29 février. Réalisé à la demande de la D'Oyly Carte Opera Company pour la première londonienne de l'opéra. Gilbert and Sullivan Archive.

La mécanique quantique a également été source de paradoxes, et l'on pourrait même affirmer qu'elle n'est rien d'autre qu'une source de paradoxes. La littérature abondante sur la manière d'interpréter le formalisme qui produit des prédictions correctes suggère qu'il n'existe aucun consensus sur l'interprétation, même si la communauté des physiciens est tout à fait disposée à accepter ce formalisme. Il a été démontré que les variables cachées ne fonctionnent pas, et s'il est nécessaire de modifier sa logique, cela revêt en soi un caractère paradoxal.

Quand on a réfléchi à certains paradoxes et qu'on s'est creusé la tête pour tenter de les résoudre, on peut être tenté d'affirmer que certains paradoxes n'ont pas nécessairement besoin d'être résolus. Cela semble être le cas des koans zen, par exemple, et peut-être aussi des énigmes comme celle du Chapelier fou : « Pourquoi un corbeau est-il comme un bureau ? » Il n'est peut-être pas facile de se débarrasser du soupçon tenace selon lequel au moins l'un des aspects du paradoxe doit reposer sur une erreur de raisonnement. Il existe des sophismes plausibles qui ne révèlent pas leurs failles à un premier examen, comme l'affirmation de Kempe selon laquelle il aurait prouvé le théorème des quatre couleurs en 1879, qui n'a été réfutée qu'en 1890.

Ce que Bagger présente comme une issue, c'est ce qu'il appelle « l'ascétisme cognitif » [1, chap. 2]. Le terme « dissonance cognitive » a été largement utilisé pour décrire la situation où l'on ne parvient pas à concilier des affirmations apparemment contradictoires. On consacre beaucoup d'efforts psychologiques à tenter de dissoudre cette dissonance, en partant du principe que celle-ci est en soi une source de tension. Ce que Bagger suggère, spécifiquement dans le domaine de la religion, c'est une forme d'acceptation sans pour autant avoir le sentiment que le monde s'écroule nécessairement autour de soi. Certains paradoxes portent un coup au bon sens, mais permettent d'avancer en tempérant ce dernier. Lorsque les paradoxes semblent mener à une contradiction, on a souvent l'impression, en mathématiques notamment, que ce type d'acceptation conduit inévitablement à accepter toutes les affirmations. D'un autre côté, il se peut que si l'on érige quelques barrières dans sa logique, on puisse alors résister à l'idée selon laquelle accepter les deux côtés d'une conclusion paradoxale est fatal. Il existe, après tout, des logiques paraconsistantes, et il n'est peut-être pas surprenant que ce soit vers elles que mènent les paradoxes.

Sources

[1] Bagger, Matthew C. (2007) *The Uses of Paradox*. New York: Columbia University Press.

[2] Bloch, William Goldbloom. (2008) *The Unimaginable Mathematics of Borges' Library of Babel*. Oxford: Oxford University Press.

[3] Cave, Peter. (2009) *This Sentence is False: An Introduction to Philosophical Paradoxes*. London: Continuum.

[4] Gottlieb, Anthony. (2000) *The Dream of Reason: A History of Western Philosophy from the Greeks to the Renaissance*. New York: Norton.

[5] Hofstadter, Douglas. (1979) *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York: Basic Books.

[6] Quine, W. V. (1966) *The Ways of Paradox and Other Essays*. New York: Random House.

Thomas Drucker est actuellement président du Philosophy of Mathematics Special Interest Group *de la* Mathematical Association of America. *Lors du MathFest 2025 à Sacramento, il a été l'un des organisateurs d'une session consacrée aux paradoxes, au cours de laquelle il a également prononcé un discours. Il a pris sa retraite de l'enseignement à l'université du Wisconsin–Whitewater en 2021.*