Sur la détermination des fonctions réciproques et le décalage entre la méthode « échanger et résoudre » et la réalité

Notes pédagogiques

Juin 2026 (tome 58, no. 3)

Konstantin Guryev (Simon Fraser University)

Rina Zazkis (Simon Fraser University)

Les Notes pédagogiques présentent des sujets mathématiques et des articles sur l'éducation aux lecteurs de la SMC dans un format qui favorise les discussions sur différents thèmes, dont la recherche, les activités les enjeux et les nouvelles d'intérêt pour les mathématicien.ne.s. Vos commentaires, suggestions et propositions sont les bienvenues.

Egan J Chernoff, *University of Saskatchewan (egan.chernoff@usask.ca)*
Kseniya Garaschuk, *University of the Fraser Valley (kseniya.garaschuk@ufv.ca)*

Afin d'alléger la formulation, le masculin est employé de façon générique et inclut sans distinction les personnes des deux genres.

Le piège procédural face à la réalité conceptuelle

Dans les cours de mathématiques en Amérique du Nord, une technique algébrique est profondément ancrée comme algorithme standard pour déterminer une fonction inverse : « Intervertir x et y, puis résoudre pour y. » Bien qu'efficace d'un point de vue algébrique dans des cas linéaires simples et sans contrainte, cette routine mécanique fait souvent perdre de vue la signification réelle de la fonction. Elle désoriente tant les étudiants que les enseignants lorsqu'ils sont confrontés à des restrictions de domaine ou à des contextes concrets où les variables ont des significations fixes (Paoletti et al., 2018).)

La réalité conceptuelle est qu'une fonction inverse inverse le processus de la fonction d'origine : elle fait correspondre les valeurs de sortie à leurs valeurs d'entrée d'origine. Lorsque l'enseignement privilégie la maîtrise procédurale au détriment de ce fondement logique, la technique d'inversion se transforme en une « astuce » mathématique plutôt qu'en une conséquence structurelle. En réalité, ce qui échappe à la plupart des étudiants et des enseignants qui s'appuient sur la procédure d'inversion, c'est que celle-ci « fonctionne » en se fondant sur la définition mathématique de l'inverse.

De plus, cette approche procédurale engendre souvent un refus cognitif plus profond face à la non-inversibilité. Par exemple, lorsqu'on leur présente une fonction quadratique sur un domaine illimité – telle que $f(x)=(x+1)^2$ pour tous les nombres réels –, de nombreux étudiants et enseignants éprouvent une forte réticence à déclarer que « l'inverse n'existe pas ». Au lieu de reconnaître que la fonction n'est pas injective, ils succombent souvent à un « espace de flou », en proposant une « parabole inclinée » ou en écrivant une expression erronée du type racine carrée +/– (Marmur & Zazkis, 2018). Même ceux qui reconnaissent le problème se sentent souvent contraints de restreindre le domaine artificiellement sur-le-champ, simplement pour éviter d'affirmer l'inexistence de la fonction inverse et revenir à l'algorithme connu.

Pour explorer ce qui se passe lorsqu'une restriction de domaine fait partie intégrante du problème, analysons un exemple concret qui met en évidence la fragilité de l'automatisme procédural.

Considérons le problème suivant : trouver la fonction inverse de $f(x)=(x+1)^2$ étant donné le domaine restreint $x \leq -2$.

Mathématiquement, il n'y a aucune différence dans la logique sous-jacente entre le fait de choisir d'exprimer la variable en premier ou d'échanger les variables en premier, dans le cas où celles-ci n'ont pas de signification fixe. Cependant, l'ordre dans lequel un résolveur exécute ces procédures modifie fondamentalement la charge cognitive et la visibilité de la relation fonctionnelle. Comment pensez-vous que vos étudiants aborderont cette tâche ? Pour nos étudiants, l'approche consistant à échanger les variables en premier semblait être celle qu'ils privilégiaient, ce qui les a souvent induits en erreur.

Inverser x et y en premier (le piège procédural)

Nous avons observé la stupeur cognitive qui survient fréquemment lorsqu'un étudiant applique immédiatement la convention du programme scolaire consistant à intervertir les variables dès la toute première étape :

$x=(y+1)^2$

L'objectif est désormais d'isoler le « nouveau » y et de définir le domaine de l'inverse. C'est précisément à ce stade que la technique se fragmente souvent en silos déconnectés :

- La stupeur radicale : en essayant de calculer la racine carrée des deux côtés, certains étudiants se bloquent. Ils jettent un coup d'œil à l'énoncé initial du problème ($x \leq -2$) et en déduisent à tort qu'ils ne peuvent pas calculer la racine carrée de x car x est négatif. Ils oublient complètement que le « nouveau » x est en réalité l'ancien y (le résultat), qui est non négatif.
- L'oubli de la valeur absolue : Ceux qui surmontent cet obstacle et écrivent $\sqrt{x} = y + 1$ oublient souvent complètement la valeur absolue, ou supposent qu'elle se résout avec un signe positif parce que $y+1$ « parait » positif. Ils ne se rendent pas compte que, puisque le « nouveau » y est l'ancien x, il est soumis à la contrainte d'origine ($y <= -2$), ce qui rend $y+1$ négatif. Ainsi, ils omettent le signe négatif requis, ce qui conduit à une fonction finale incorrecte.

Pour éviter ces deux écueils, nous proposons une approche différente.

Exprimer *x* en fonction de *y* en premier (la méthode conceptuelle)

En conservant les variables d'origine lors de la manipulation algébrique, les rôles fonctionnels de l'entrée et de la sortie restent clairs et traçables :

1. Nous partons de la relation fonctionnelle : $y=(x+1)^2$
2. Comme les deux côtés sont non négatifs dans le cadre de nos contraintes, nous prenons la racine carrée des deux côtés. En nous rappelant que la racine carrée d'un carré correspond à la valeur absolue, nous écrivons : $\sqrt{y} = |x+1|$
3. Puisque le domaine donné indique $x \leq -2$, il s'ensuit que $x+1 \leq -1$, ce qui signifie que l'expression à l'intérieur de la valeur absolue est négative. Ainsi, la valeur absolue se clarifie avec un signe négatif : $\sqrt{y} = -(x+1)$.
4. En résolvant pour x, on obtient : $x = -\sqrt{y} - 1$.

Maintenant, l'inversion mathématique est entièrement achevée. Nous avons déterminé avec succès comment la variable indépendante x dépend de la valeur de sortie y. Pour terminer la description de cette nouvelle fonction, nous identifions son domaine, qui doit coïncider exactement avec l'image de la fonction d'origine. Puisque $x \leq -2$, les valeurs de sortie sont $y \geq 1$. Par conséquent, le domaine de l'inverse est $y \geq 1$.

Par souci de commodité, et pour respecter la convention standard qui nous permet de représenter graphiquement les deux fonctions sur les mêmes axes de coordonnées, nous pouvons maintenant procéder à un échange de variables : $y = -\sqrt{x} - 1$ pour $x \geq 1$.

Chaque étape de cette progression préserve les liens logiques entre la loi fonctionnelle, les variables et leurs domaines correspondants.

Conclusion

La technique « échanger et résoudre » est incroyablement puissante dans les cas linéaires sans contrainte, où les étudiants voient une voie ouverte pour isoler , ce qui leur procure un sentiment rassurant de progrès. Cependant, comme le démontre notre exemple quadratique, cette sécurité structurelle est une illusion. Dans des contextes plus complexes ou restreints, intervertir les variables au début peut obscurcir les relations entre la règle de la fonction, le domaine et l'image.

Nous admettons qu'il est peut-être impossible de bannir complètement une technique si profondément ancrée dans les salles de classe. Il faut plutôt que l'enseignement réoriente son approche, en s'éloignant des routines mécaniques pour se tourner vers des solutions significatives. Les cours d'introduction au calcul différentiel et intégral à l'université peuvent constituer un cadre approprié pour repenser ce qui « fonctionnait » à l'école. En ancrant les étapes procédurales dans leurs fondements logiques et structurels, nous pouvons nous assurer que nos étudiants ne considèrent pas les manipulations algébriques comme des tours de magie isolés, mais comme le reflet direct de la beauté structurelle des relations inverses.

Références

Marmur, O. & Zazkis, R. (2018). Space of fuzziness: Avoidance of deterministic decisions in the case of the inverse function. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(3), 261-275.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L., Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers' techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 97(1), 93-109.

Société mathématique du Canada — 616 Cooper St., Ottawa (ON) K1R 5J2, Canada