Progrès en logique et en mathématiques

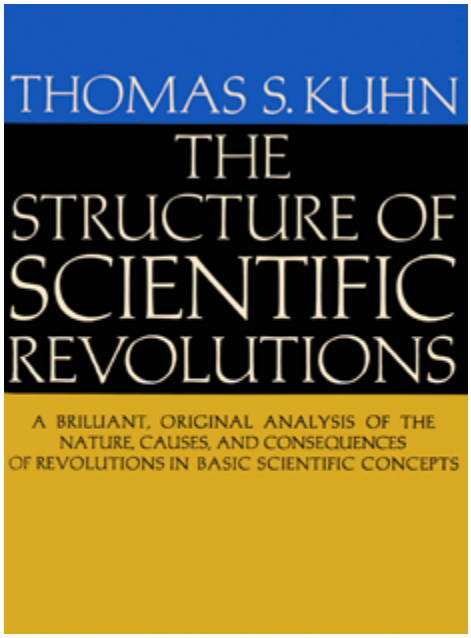
Notes de la SCHPM

Octobre 2026 (tome 58, no. 5)

Nicolas Fillion (Simon Fraser University)

CSHPM Notes brings scholarly work on the history and philosophy of mathematics to the broader mathematics community. Authors are members of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics (CSHPM). Comments and suggestions are welcome; they may be directed to the column's editors:
Amy Ackerberg-Hastings, *independent scholar (aackerbe@verizon.net)*
Nicolas Fillion, *Simon Fraser University (nfillion@sfu.ca)*

À mesure qu'elles se développent, évoluent et arrivent à maturité, les sciences se transforment considérablement. De plus, ces changements ne sont pas uniquement superficiels : ils touchent profondément leur contenu même. Il serait difficile pour quiconque de nier l'une ou l'autre de ces affirmations. Au cours des derniers millénaires — ou même, dans certains cas, des dernières décennies —, nous avons été témoins de l'émergence de méthodes entièrement nouvelles, de l'abandon de théories profondément enracinées qui semblaient autrefois inébranlables, et de leur remplacement par de nouvelles approches, jadis inimaginables. Il ne fait donc aucun doute que la science se reconstruit constamment, pour ainsi dire.Dans son ouvrage [8; figure 1], Kuhn a soutenu que la science évolue en traversant des phases de science normale et de science révolutionnaire. En période de science normale, les progrès sont principalement de nature cumulative : un nombre croissant de problèmes « mineurs » sont résolus. Dans cette phase, le progrès se mesure au nombre toujours plus grand de questions qui trouvent une réponse et de vérités confirmées qui viennent s'ajouter au corpus des connaissances scientifiques.Toutefois, les problèmes de plus en plus récalcitrants, qui résistent aux meilleures tentatives de résolution, plongent les communautés scientifiques dans une période de crise, laquelle finit par déboucher sur une révolution. Cette révolution constitue une rupture radicale avec le passé. Elle renverse et remplace non seulement les théories et les méthodes, mais parfois aussi les normes, les valeurs qui orientent la recherche, les ontologies et des cadres conceptuels entiers (que l'on désigne collectivement par le terme « paradigmes »). Les progrès associés aux révolutions ne sont pas cumulatifs. Ils comportent plutôt une dimension destructrice, puisqu'ils exigent le rejet de propositions auparavant considérées comme vraies.La thèse de Kuhn a suscité de nombreux débats. Certains historiens des sciences ont soutenu que sa façon de présenter l'histoire des sciences était trompeuse, voire parfois inexacte. Certains philosophes ont affirmé que le terme « paradigme » était tellement confus qu'il en devenait inutilisable. Enfin, de nombreux passionnés de sciences issus de toutes les disciplines universitaires ont avancé que certaines des idées les plus ouvertement relativistes de Kuhn (par exemple, son affirmation selon laquelle l'adoption d'une nouvelle théorie physique s'apparente à une conversion religieuse) ne rendent pas compte de la rationalité qui caractérise le développement de la science.Mais un fait demeure : malgré les nuances importantes et les désaccords concernant la manière dont la science évolue au fil du temps et l'ampleur de ces changements, l'existence de transformations profondes ne fait aucun doute. Il est également difficile de contester que certains aspects de l'évolution scientifique sont de nature non cumulative, comme le soutenait Kuhn.



This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

tiques comporte indéniablement une dimension cumulative : davantage de problèmes sont résolus, davantage de propositions sont démontrées et des méthodes d'analyse plus puissantes sont développées. Cependant, comparativement à l'immense quantité de travaux consacrés aux changements scientifiques et aux paradigmes dans l'histoire et la philosophie des sciences, les études portant sur l'histoire et la philosophie des mathématiques sont étonnamment peu nombreuses. Pour amorcer la réflexion, on pourrait se demander si la croissance des mathématiques comporte également des aspects non cumulatifs. À ma connaissance, la première étude à avoir envisagé cette possibilité est *Proofs and Refutations* de Lakatos [9; figure 3]. En examinant l'histoire de concepts tels que « polyèdre » et « continuité », il a montré qu'il arrive que certaines transformations redéfinissent en profondeur des parties des mathématiques, d'une manière qui ne correspond pas tout à fait à la vision cumulative du progrès. De telles transformations profondes peuvent-elles être considérées comme des révolutions au sens de Kuhn? Un ouvrage peu courant qui aborde cette question est un recueil dirigé par Gillies [5]. Certains auteurs nient l'existence de révolutions en mathématiques, tandis que d'autres défendent cette idée en citant des exemples comme la géométrie non euclidienne, les nombres irrationnels, le calcul infinitésimal, l'analyse de l'infini dans la théorie des ensembles de Cantor et la philosophie formaliste de Hilbert. Le débat porte sur ce que l'on considère comme une révolution. Gillies examine deux « modèles » : les révolutions franco-britanniques et la révolution russe. Il y a quelques années, j'ai avancé dans [3] qu'aucun de ces modèles ne rend compte des changements en mathématiques, mais que la Révolution tranquille du Québec dans les années 1960 constitue un modèle plausible de certaines transformations profondes dans l'histoire des mathématiques. Au cours de cette période, aucun régime politique officiel n'a été renversé ni n'a perdu de son importance. Pourtant, les façons de faire au sein des institutions ont été profondément renégociées afin que la société fonctionne mieux pour la population et que celle-ci tire davantage profit de ces institutions. Quoi que l'on pense finalement de cette question, reconnaître l'existence de changements non cumulatifs en mathématiques soulève de nombreuses questions complexes sur la nature même des mathématiques en tant que branche du savoir.Une difficulté tient au fait que les mathématiques sont profondément liées à la logique et à la méthode axiomatique. Depuis qu'Aristote a formulé les principes directeurs de la méthode axiomatique dans les *Seconds Analytiques* (figure 2), lesquels ont été repris et mis en pratique peu après par Euclide dans *Les Éléments*, cette méthode constitue un élément fondamental de la pratique des mathématiques à leur plus haut niveau. Selon cette tradition, les sciences axiomatiques (dont les mathématiques sont le cas par excellence) sont structurées de manière à partir de vérités évidentes en elles-mêmes (ou, du moins, de propositions dont on sait qu'elles sont vraies), puis à déduire d'autres propositions dont la vérité sera à son tour connue, puisque les déductions consistent en des chaînes de raisonnements dont chaque étape est reconnue comme valide. En définitive, la validité relève de la logique. Dans cette perspective, le progrès est associé à une « plus grande connaissance », obtenue en démontrant davantage de propositions à partir d'axiomes donnés et en appliquant la méthode à un plus grand nombre de systèmes d'axiomes (même si l'on admettrait probablement que toutes les propositions et tous les systèmes d'axiomes n'ont pas la même importance en matière de progrès).Où le progrès non cumulatif — celui qui exige de renverser quelque chose — peut-il trouver sa place dans cette perspective traditionnelle? Une possibilité serait qu'une proposition que l'on croyait démontrée ne l'ait pas été en réalité, autrement dit, que nous ayons été induits en erreur par une démonstration incorrecte. Cela exigerait *à première vue* l'une de deux choses : (1) une proposition considérée comme évidente en elle-même se révèle fausse ou (2) une inférence que l'on croyait valide se révèle invalide. Il existe bien sûr de nombreux exemples célèbres de ces deux situations dans l'histoire des mathématiques. Mais, au bout du compte, ces situations se résument à des erreurs de notre part. Or, corriger des erreurs relève difficilement du type de transformation profonde que nous avons examiné jusqu'ici. Si de telles transformations existent en mathématiques, il faut chercher ailleurs.

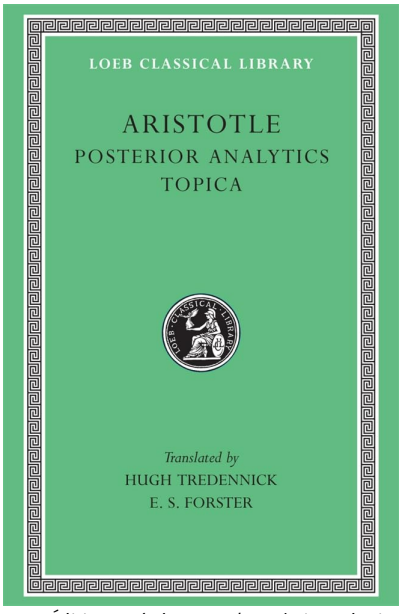


Figure 2. Édition Loeb des *Seconds Analytiques* d'Aristote. (Harvard University Press, 1960). Amazon.

Le meilleur moyen de repérer les transformations profondes en mathématiques consiste à examiner comment la méthode axiomatique elle-même s'est transformée. Dans un premier temps, nous pouvons chercher à retracer les remises en question fondamentales de la notion d'axiome. En effet, historiquement, cela s'est produit lorsque la notion d'axiome s'est dissociée de celle de vérité évidente en elle-même. Cette séparation était étroitement liée au développement de la géométrie non euclidienne.Un épisode particulièrement intéressant où cette transformation s'est manifestée est la controverse entre Frege et Hilbert sur les fondements de la géométrie, qui a suivi la publication des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert en 1899 (les lettres échangées sont reproduites dans [4]). Fait intéressant, cet échange révèle qu'une grande partie de l'ingéniosité de Frege et de ses innovations logiques ont été mises au service de la défense de l'ancienne conception euclidienne des systèmes axiomatiques, une conception qui allait être renversée. Frege a d'ailleurs éprouvé beaucoup de difficulté à comprendre la nouvelle approche des sciences axiomatiques défendue par Hilbert, qu'il qualifiait de « pseudo-science ». Cette transformation a joué un rôle essentiel dans le développement de la philosophie structuraliste des mathématiques, aujourd'hui étroitement associée aux mathématiques modernes, postérieures au XIXe siècle [10].Il s'agissait bel et bien

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

gressivement en une notion topologique : celle d'être homéomorphe à une sphère.Compte tenu du caractère ouvert et évolutif des concepts, ainsi que de leur transformation au fil du développement d'une science, nous devons conclure que « ce qui est intuitivement clair en mathématiques s'est révélé ne pas être aussi intuitivement clair qu'on le croyait » [6]. L'analyse conceptuelle fondée sur l'intuition a dû être abandonnée comme fondement des mathématiques, non pas parce qu'elle était inutile, mais parce que ses limites étaient trop importantes.



Figure 3. Imre Lakatos dans les années 1960.*Wikipedia*.

Il existe au moins un autre domaine prometteur où chercher des transformations profondes en mathématiques : celui des transformations profondes en logique, ce qui nous ramène au point (2) mentionné précédemment. Puisque la méthode axiomatique repose essentiellement sur notre conception des axiomes et de la validité des inférences logiques, toute transformation profonde en logique entraînerait *ipso facto* des transformations profondes en mathématiques.Existe-t-il des transformations profondes, voire des révolutions, en logique? Pour répondre à cette question, il faut examiner une histoire qui s'étend sur près de 2 400 ans, depuis l'époque où Aristote a écrit les *Topiques* et les *Premiers Analytiques* (ainsi que le reste de l'*Organon*) jusqu'à nos jours. Le même homme (figure 4) qui avait affirmé avec présomption que les axiomes de la géométrie euclidienne étaient des vérités nécessaires, quelques années seulement avant que Gauss, Bolyai et Lobatchevski ne fondent le nouveau domaine de la géométrie non euclidienne, avait également des propos plutôt catégoriques sur la possibilité d'un changement en logique :

> Le fait que, depuis les tout premiers temps, la logique ait suivi cette voie sûre se constate à ceci : depuis l'époque d'Aristote, elle n'a pas eu à faire *un seul pas en arrière*, à moins que l'on ne considère comme tels l'abandon de quelques subtilités dispensables ou une présentation plus précise de ses éléments, améliorations qui relèvent davantage de l'élégance que de la rigueur de cette science. Ce qui est encore plus remarquable en logique, c'est que, jusqu'à présent, elle a également été *incapable* de faire un seul *pas en avant* et qu'elle semble donc, à toutes fins pratiques, être *achevée et complète* » [7, Bviii, p. 106, italiques dans l'original].

Bien que peu de gens osent formuler des affirmations aussi manifestement fausses avec autant d'assurance et de détermination, l'idée de Kant selon laquelle la logique ne change essentiellement pas est, d'après mon expérience, assez répandue.Pourtant, dès l'époque de Kant, la logique avait connu des changements importants depuis Aristote. Une source de malentendu tient au fait que l'expression « logique aristotélicienne » désigne à la fois une doctrine particulière (la théorie du syllogisme exposée dans les chapitres 1 et 2, ainsi que 4 à 7 du livre A des *Premiers Analytiques*) et une tradition qui s'étend sur plusieurs siècles et qui perdure encore aujourd'hui. Par exemple, les personnes qui connaissent la logique aristotélicienne ont peut-être appris la théorie dite de la réduction des syllogismes, selon laquelle les modes syllogistiques portent des noms comme Barbara, Celarent, Baroco, Bocardo, Festino, etc., dont les consonnes codent les étapes de démonstration permettant d'établir leur validité. Toutefois, ce n'est *pas* ainsi que la logique est conçue dans les *Premiers Analytiques*. Bien qu'il existe d'importants débats sur la meilleure façon d'interpréter cet ouvrage, la meilleure façon de décrire le système logique élaboré par Aristote, par analogie avec les approches modernes, serait de dire qu'il s'agit d'un système de déduction naturelle [2; 12]. En revanche, la théorie de la réduction mentionnée précédemment n'est certainement pas un système de déduction naturelle. Elle a été élaborée au Moyen Âge central (ses origines sont plutôt obscures) et il vaut mieux la considérer comme un calcul des séquents. Peut-être Kant considérait-il l'invention médiévale du calcul des séquents comme une « subtilité dispensable », un simple changement cosmétique en logique sans valeur substantielle. Mais cela en dit davantage sur Kant que sur la logique. En fait, la logique a connu une multitude de développements majeurs au Moyen Âge, à tel point que Bocheński a qualifié cette période de l'un des trois âges d'or de la logique (avec la logique de la Grèce antique et celle du XXe siècle). Par exemple, une autre approche entièrement différente de la logique a été élaborée à la fin du Moyen Âge : la doctrine dite de la distribution des termes et la doctrine de la supposition. Ces approches ont permis aux logiciens de l'époque de développer la logique aristotélicienne dans de nouvelles directions. Ainsi, à partir d'Ockham et de Buridan, l'analyse des inférences faisant intervenir des termes obliques est devenue un sujet d'étude important. Buridan a proposé une façon de démontrer la validité de l'argument suivant :

> Tout âne appartenant à un homme court.
>
> Un homme est directeur d'une école.
>
> Par conséquent, un âne appartenant au directeur d'une école court.

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité



Figure 4. Emmanuel Kant, peint par Johann Gottlieb Becker en 1768. *Wikipedia*.

D'autres défendent une position à l'autre extrémité du spectre : selon eux, la logique a tellement changé depuis l'époque d'Aristote qu'elle constitue essentiellement une discipline entièrement nouvelle. Voici, par exemple, ce qu'écrit Quine :

La logique mathématique diffère tellement de la logique formelle traditionnelle par sa méthode et la dépasse à ce point en puissance et en subtilité qu'elle est généralement, et non sans raison, considérée comme une science nouvelle [11].

Si l'on prend Quine tout à fait au pied de la lettre, il ne dit pas qu'une révolution s'est produite *au sein* de la logique. Il suggère plutôt qu'une nouvelle discipline, également appelée `logique`, a vu le jour et qu'elle constitue en quelque sorte la version améliorée de l'ancienne. Toutefois, il ressort clairement du reste de son *Introduction* que Quine considérait tout de même l'ancienne et la nouvelle logique comme étant en continuité l'une avec l'autre. Il reconnaît donc l'existence de transformations profondes en logique, que l'on pourrait, sans trop forcer l'interprétation, qualifier de révolution.Voilà qui semble constituer une autre source possible de changements profonds et substantiels en mathématiques, qui ne sont pas nécessairement de nature cumulative. Au cours de ce processus, certains arguments auparavant considérés comme valides ont été rejetés. C'est notamment le cas de l'argument « Tous les A sont des B, donc certains A sont des B », ainsi que de tous les autres arguments faisant appel à un « engagement existentiel » dans les prémisses conditionnelles universelles. Les raisons qui sous-tendent ce changement sont profondes, et il serait impossible de leur rendre justice ici.Terminons plutôt en nous demandant si cette source potentielle de changements substantiels est distincte des deux premières, et si ces deux premières sources sont elles-mêmes réellement distinctes. La méthode axiomatique, l'analyse des concepts mathématiques et la méthodologie logique ont effectivement connu des transformations très importantes — et, fait notable, elles se sont toutes produites à peu près à la même époque, soit à la fin du XIXe et au début du XXe siècle.Bien que ces trois transformations soient certainement distinctes dans une certaine mesure, elles forment quelque chose qui ressemble à une petite forêt intellectuelle reliée par un réseau mycorhizien. Cette analogie est-elle pertinente? Pour le découvrir, je vous invite à vous plonger dans l'étude de l'histoire de la logique, à la croisée de l'histoire des mathématiques, de la philosophie des mathématiques et de la pratique mathématique elle-même.Il y avait peut-être autrefois des choses plus urgentes à faire, mais maintenant, l'IA s'en chargera!

References

[1] Bocheński, J. M. (1961) *A history of formal logic*. Edited and translated by I. Thomas. Notre Dame: University of Notre Dame Press.

[2] Corcoran, J. (1974) Aristotelian syllogisms: Valid arguments or true generalized conditionals? *Mind* 83(330), 278–281.

[3] Fillion, N. (2019) Conceptual and computational mathematics. *Philosophia Mathematica* 27(2), 199–218.

[4] Frege, G. (1980) *Philosophical and mathematical correspondence*. Edited by G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, & A. Veraart. Translated by H. Kaal & B. McGuinness. Chicago: University of Chicago Press.

[5] Gillies, D., ed. (1992) *Revolutions in mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

[6] Heyting, A. (1962) After thirty years. In Logic, methodology and philosophy of science: Proceedings of the 1960 International Congress, edited by E. Nagel, P. Suppes, & A. Tarski, 194–197. Redwood City, CA: Stanford University Press.

[7] Kant, I. (1781/1998) *Critique of pure reason*. Edited and translated by P. Guyer & A. W. Wood. Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Kuhn, T. S. (1962) *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

[9] Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Mac Lane, S. (1996) Structure in mathematics. *Philosophia Mathematica* 4(2), 174–183.

[11] Quine, W. V. (1951) *Mathematical logic*. Cambridge: Harvard University Press.

[12] Smith, R. (1989) Introduction. In *Prior analytics*, translated by R. Smith. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

Droits d'auteurs & autorisations
La Société mathématique du Canada autorise les lecteurs individuels de cette publication à copier les articles pour leur usage personnel. L'utilisation à d'autres fins est strictement interdite. Pour obtenir une licence autre que la copie d'articles à des fins personnelles, veuillez contacter la Société mathématique du Canada pour demander des autorisations ou des conditions de licence.

Société mathématique du Canada — 616 Cooper St., Ottawa (ON) K1R 5J2, Canada

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité