Progrès en logique et en mathématiques

Notes de la SCHPM

Octobre 2026 (tome 58, no. 5)

Nicolas Fillion (Simon Fraser University)

CSHPM Notes brings scholarly work on the history and philosophy of mathematics to the broader mathematics community. Authors are members of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics (CSHPM). Comments and suggestions are welcome; they may be directed to the column's editors:
Amy Ackerberg-Hastings, *independent scholar (aackerbe@verizon.net)*
Nicolas Fillion, *Simon Fraser University (nfillion@sfu.ca)*

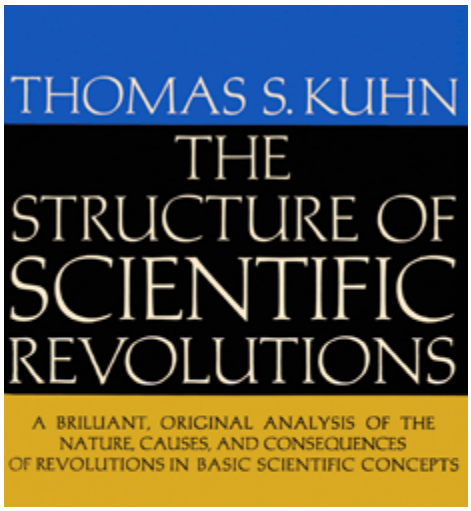
À mesure qu'elles se développent, évoluent et arrivent à maturité, les sciences se transforment considérablement. De plus, ces changements ne sont pas uniquement superficiels : ils touchent profondément leur contenu même. Il serait difficile pour quiconque de nier l'une ou l'autre de ces affirmations. Au cours des derniers millénaires — ou même, dans certains cas, des dernières décennies —, nous avons été témoins de l'émergence de méthodes entièrement nouvelles, de l'abandon de théories profondément enracinées qui semblaient autrefois inébranlables, et de leur remplacement par de nouvelles approches, jadis inimaginables. Il ne fait donc aucun doute que la science se reconstruit constamment, pour ainsi dire.

Dans son ouvrage [8; figure 1], Kuhn a soutenu que la science évolue en traversant des phases de science normale et de science révolutionnaire. En période de science normale, les progrès sont principalement de nature cumulative : un nombre croissant de problèmes « mineurs » sont résolus. Dans cette phase, le progrès se mesure au nombre toujours plus grand de questions qui trouvent une réponse et de vérités confirmées qui viennent s'ajouter au corpus des connaissances scientifiques.

Toutefois, les problèmes de plus en plus récalcitrants, qui résistent aux meilleures tentatives de résolution, plongent les communautés scientifiques dans une période de crise, laquelle finit par déboucher sur une révolution. Cette révolution constitue une rupture radicale avec le passé. Elle renverse et remplace non seulement les théories et les méthodes, mais parfois aussi les normes, les valeurs qui orientent la recherche, les ontologies et des cadres conceptuels entiers (que l'on désigne collectivement par le terme « paradigmes »). Les progrès associés aux révolutions ne sont pas cumulatifs. Ils comportent plutôt une dimension destructrice, puisqu'ils exigent le rejet de propositions auparavant considérées comme vraies.

La thèse de Kuhn a suscité de nombreux débats. Certains historiens des sciences ont soutenu que sa façon de présenter l'histoire des sciences était trompeuse, voire parfois inexacte. Certains philosophes ont affirmé que le terme « paradigme » était tellement confus qu'il en devenait inutilisable. Enfin, de nombreux passionnés de sciences issus de toutes les disciplines universitaires ont avancé que certaines des idées les plus ouvertement relativistes de Kuhn (par exemple, son affirmation selon laquelle l'adoption d'une nouvelle théorie physique s'apparente à une conversion religieuse) ne rendent pas compte de la rationalité qui caractérise le développement de la science.

Mais un fait demeure : malgré les nuances importantes et les désaccords concernant la manière dont la science évolue au fil du temps et l'ampleur de ces changements, l'existence de transformations profondes ne fait aucun doute. Il est également difficile de contester que certains aspects de l'évolution scientifique sont de nature non cumulative, comme le soutenait Kuhn.



This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

(University of Chicago Press, 1962). *Wikipedia*.

Mathematics certainly undergoes substantive change as well; I would be shocked if any reader of the *CMS Notes* disagreed. Once again, the debate is more concerned with how mathematics changes over time, and to what extent. There is undeniably a cumulative dimension to the growth of mathematics: more problems get solved, more propositions are proven, and more powerful methods of analysis are developed. However, compared to the enormous literature on scientific change and on paradigms in history and philosophy of science, there is surprisingly little in history and philosophy of mathematics. One place to begin is by asking whether there are also non-cumulative aspects of the growth of mathematics. To my knowledge, the first study to consider the possibility is Lakatos' *Proofs and Refutations* [9; Figure 3]. By examining the history of concepts such as "polyhedron" and "continuity", he showed that there sometimes are transformations that reconceptualize parts of mathematics in a deep way that doesn't quite fit the cumulative view of progress. Do such profound transformations rise to the status of Kuhnian revolutions? A rare source that addresses this issue is a collection edited by Gillies [5]. Some authors deny that there are revolutions in mathematics, while others support the claim with examples such as non-Euclidean geometry, irrational numbers, the calculus of infinitesimals, Cantorian set theory's analysis of infinity, and Hilbert's formalist philosophy. The debate revolves around what is considered a revolution. Gillies considers two "models", i.e., the Franco-British revolutions and the Russian revolution. A few years ago, I suggested in [3] that neither captures change in mathematics, but that Quebec's quiet revolution in the 1960s—one in which no official political regime was overthrown or experienced lost importance, and yet it yielded a thorough renegotiation of how things were to function within given institutions, in order to make society work better for people and get more from those institutions—is a plausible model of some profound transformations in the history of mathematics. But whatever one ultimately thinks about this question, recognizing the existence of non-cumulative change in mathematics raises many puzzling questions about what mathematics is, as a branch of knowledge.

One difficulty is that mathematics is so profoundly entangled with logic and the axiomatic method. Since Aristotle articulated the guiding principles of the axiomatic method in the *Posterior Analytics* (Figure 2), which was shortly after adapted and implemented by Euclid in *The Elements*, it has been a constitutive element in what it is to practice mathematics at its highest level. Following the tradition, axiomatic science (including mathematics as the case *par excellence*) is structured so that we start from self-evident truths (or, at least, propositions known to be true) and deduce other propositions whose truth will then come to be known owing to the fact that deductions are chains of reasonings each step of which is known to be valid. And ultimately, validity is a matter handled by logic. From this perspective, progress is associated with "more knowledge", which is accomplished by proving more propositions from given axioms and by applying the method to more axiom systems (although one would likely grant that not all propositions or axiom systems weigh the same, progress wise).

Where can non-cumulative progress—the progress that requires overthrowing something—fit within this traditional perspective? One possibility is that something that was thought to be proved was not actually proved, i.e., that we were duped by an incorrect proof. That would *prima facie* require one of two things: (1) a proposition accepted as self-evident turned out to be false or (2) an inference thought to be valid turned out to be invalid. There are of course many famous cases of both in the history of mathematics. But both ultimately boiled down to us making mistakes. Now, correcting mistakes is hardly the sort of deep transformation that we have considered so far. If there is to be any such thing in mathematics, we must look elsewhere.

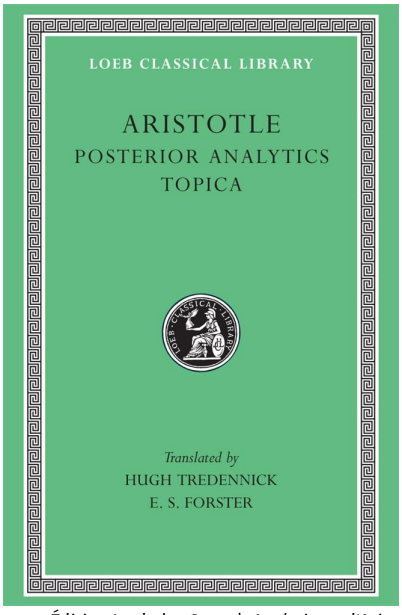


Figure 2. Édition Loeb des *Seconds Analytiques* d'Aristote.
(Harvard University Press, 1960). Amazon.

Le meilleur moyen de repérer les transformations profondes en mathématiques consiste à examiner comment la méthode axiomatique elle-même s'est transformée. Dans un premier temps, nous pouvons chercher à retracer les remises en question fondamentales de la notion d'axiome. En effet, historiquement, cela s'est produit lorsque la notion d'axiome s'est dissociée de celle de vérité évidente en elle-même. Cette séparation était étroitement liée au développement de la géométrie non euclidienne.

Un épisode particulièrement intéressant où cette transformation s'est manifestée est la controverse entre Frege et Hilbert sur les fondements de la géométrie, qui a suivi la publication des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert en 1899 (les lettres échangées sont reproduites dans [4]). Fait intéressant, cet échange révèle qu'une grande partie de l'ingéniosité de Frege et de ses innovations logiques ont été mises au service de la défense de l'ancienne conception euclidienne des systèmes axiomatiques, une conception qui allait être renversée. Frege a

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

de progrès non cumulatif dans toute cette histoire. Il doit y avoir autre chose.

Revenir à l'observation de Lakatos nous amène à envisager une autre source possible de transformations profondes, que l'on peut interpréter dans cette perspective. L'une des raisons de rejeter l'exigence de partir d'axiomes dont la vérité est évidente en eux-mêmes est que les axiomes sont des propositions qui établissent des relations entre des concepts, et que les concepts possèdent généralement une certaine souplesse qui empêche de déclarer définitivement qu'une proposition est évidente en elle-même.

L'étude historique du concept de polyèdre par Lakatos en est un bon exemple. Elle part d'une liste qui semble satisfaisante de conditions nécessaires et suffisantes pour définir un polyèdre, soit un solide délimité par des faces polygonales. Des difficultés surgissent toutefois lorsque cette forme géométrique « intuitivement claire » se transforme progressivement en une notion topologique : celle d'être homéomorphe à une sphère.

Compte tenu du caractère ouvert et évolutif des concepts, ainsi que de leur transformation au fil du développement d'une science, nous devons conclure que « ce qui est intuitivement clair en mathématiques s'est révélé ne pas être aussi intuitivement clair qu'on le croyait » [6]. L'analyse conceptuelle fondée sur l'intuition a dû être abandonnée comme fondement des mathématiques, non pas parce qu'elle était inutile, mais parce que ses limites étaient trop importantes.



Figure 3. Imre Lakatos dans les années 1960. *Wikipedia*.

Il existe (au moins!) un autre domaine prometteur où chercher des transformations profondes en mathématiques : celui des transformations profondes en logique, ce qui nous ramène au point (2) mentionné plus haut. Puisque la méthode axiomatique repose en grande partie sur notre conception des axiomes et de la validité des inférences logiques, il s'ensuivrait *ipso facto* que les mathématiques connaissent des transformations profondes si de telles transformations se produisaient en logique.

La logique connaît-elle des transformations profondes, voire des révolutions? Pour répondre à cette question, il faut examiner une histoire qui s'étend sur près de 2 400 ans, depuis l'époque où Aristote a écrit les *Topiques* et les *Premiers Analytiques* (ainsi que le reste de l'*Organon*) jusqu'à nos jours.

Le même homme (figure 4) qui avait affirmé avec présomption que les axiomes de la géométrie euclidienne étaient des vérités nécessaires, quelques années à peine avant que Gauss, Bolyai et Lobatchevski ne fondent le nouveau domaine de la géométrie non euclidienne, avait également des propos plutôt catégoriques sur la possibilité que la logique évolue :

« Le fait que, depuis les temps les plus anciens, la logique ait suivi cette voie sûre se voit à ce que, depuis Aristote, elle n'a pas eu à faire *un seul pas en arrière*, à moins que l'on ne considère comme tels l'abandon de quelques subtilités superflues ou une présentation plus précise de son contenu, améliorations qui relèvent davantage de l'élégance que de la solidité de cette science. Ce qui est encore plus remarquable au sujet de la logique, c'est que, jusqu'à présent, elle n'a pas non plus été *capable* de faire un seul *pas en avant* et qu'elle semble donc, à tous égards, *achevée et complète* [7, Bviii, p. 106, italiques ajoutés]. »

Bien peu de personnes auraient l'audace de formuler des affirmations aussi spectaculairement fausses avec autant d'assurance et de détermination. Pourtant, d'après mon expérience, l'opinion de Kant selon laquelle la logique ne change essentiellement pas est assez répandue.

Et pourtant, dès l'époque de Kant, la logique avait déjà connu des changements importants depuis Aristote. Une source de malentendus tient au fait que l'expression « logique aristotélicienne » désigne à la fois une doctrine particulière (la théorie du syllogisme exposée dans les chapitres 1 et 2, ainsi que 4 à 7, du livre A des *Premiers Analytiques*) et une tradition qui s'étend sur plusieurs siècles et qui perdure encore aujourd'hui.

Par exemple, les personnes qui connaissent la logique aristotélicienne ont peut-être appris la théorie dite de la réduction des syllogismes, dans laquelle les modes syllogistiques portent des noms comme Barbara, Celarent, Baroco, Bocardo et Festino, dont les consonnes codent les étapes de démonstration permettant d'établir leur validité. Or, ce n'est pas ainsi que la lo

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

Mais cela en dit davantage sur Kant que sur la logique. En fait, la période médiévale a connu une abondance de développements majeurs en logique, à tel point que Bocheński l'a qualifiée de l'un des trois âges d'or de la logique, avec la logique de la Grèce antique et celle du XXe siècle.

Par exemple, une autre approche de la logique, complètement différente, a été élaborée à la fin du Moyen Âge : la doctrine de la distribution des termes et celle de la supposition. Ces approches ont permis aux logiciens de l'époque de développer la logique aristotélicienne dans de nouvelles directions.

Ainsi, à partir d'Ockham et de Buridan, l'analyse des inférences comportant des termes obliques est devenue un sujet d'intérêt majeur. Buridan a proposé une méthode pour établir la validité de l'argument suivant :

Tout âne appartenant à un homme court.

Un homme est directeur d'une école.

Donc, un âne appartenant au directeur d'une école court.

Cela peut sembler peu impressionnant aux yeux d'une personne d'aujourd'hui, mais cet exemple introduit des arguments comportant plus de trois termes et fait appel à une forme de logique relationnelle avec des termes enchâssés (par exemple : le Christ est Dieu. Marie est la mère du Christ. Donc, Marie est la mère de Dieu), qui va bien au-delà de la logique d'Aristote.

Cette période a connu de nombreux autres développements majeurs, notamment certains éléments de sémantique modale qui dépassent la logique modale d'Aristote. Il est clair que Kant ne connaissait pas particulièrement bien l'histoire de la discipline au sujet de laquelle il affirmait qu'elle n'avait pas changé et ne pouvait pas changer. Il s'avère qu'il est plus facile de soutenir que la logique ne connaît pas de transformations substantielles lorsqu'on ne connaît pas son histoire.



Figure 4. Emmanuel Kant, peint par Johann Gottlieb Becker en 1768. *Wikipedia*.

D'autres défendent une position à l'autre extrémité du spectre : selon eux, la logique a tellement changé depuis l'époque d'Aristote qu'elle constitue essentiellement une discipline entièrement nouvelle. Voici, par exemple, ce qu'écrit Quine :

« La logique mathématique diffère tellement de la logique formelle traditionnelle par sa méthode et la dépasse à ce point en puissance et en subtilité qu'elle est généralement, et non sans raison, considérée comme une science nouvelle » [11].

Si l'on prend Quine tout à fait au pied de la lettre, il ne dit pas qu'une révolution s'est produite *au sein* de la logique. Il suggère plutôt qu'une nouvelle discipline, également appelée « logique », a vu le jour et qu'elle constitue en quelque sorte la version améliorée de l'ancienne. Toutefois, il ressort clairement du reste de son *Introduction* que Quine considérait tout de même l'ancienne et la nouvelle logique comme étant en continuité l'une avec l'autre. Il reconnaît donc l'existence de transformations profondes en logique, que l'on pourrait, sans trop forcer l'interprétation, qualifier de révolution.

Voilà qui semble constituer une autre source possible de changements profonds et substantiels en mathématiques, qui ne sont pas nécessairement de nature cumulative. Au cours de ce processus, certains arguments auparavant considérés comme valides ont été rejetés. C'est notamment le cas de l'argument « Tous les A sont des B, donc certains A sont des B », ainsi que de tous les autres arguments faisant appel à un « engagement existentiel » dans les prémisses conditionnelles universelles. Les raisons qui sous-tendent ce changement sont profondes, et il serait impossible de leur rendre justice ici.

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité

Il y avait peut-être autrefois des choses plus urgentes à faire, mais maintenant, l'IA s'en chargera!

References

[1] Bocheński, J. M. (1961) *A history of formal logic*. Edited and translated by I. Thomas. Notre Dame: University of Notre Dame Press.

[2] Corcoran, J. (1974) Aristotelian syllogisms: Valid arguments or true generalized conditionals? *Mind* 83(330), 278–281.

[3] Fillion, N. (2019) Conceptual and computational mathematics. *Philosophia Mathematica* 27(2), 199–218.

[4] Frege, G. (1980) *Philosophical and mathematical correspondence*. Edited by G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, & A. Veraart. Translated by H. Kaal & B. McGuinness. Chicago: University of Chicago Press.

[5] Gillies, D., ed. (1992) *Revolutions in mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

[6] Heyting, A. (1962) After thirty years. In Logic, methodology and philosophy of science: Proceedings of the 1960 International Congress, edited by E. Nagel, P. Suppes, & A. Tarski, 194–197. Redwood City, CA: Stanford University Press.

[7] Kant, I. (1781/1998) *Critique of pure reason*. Edited and translated by P. Guyer & A. W. Wood. Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Kuhn, T. S. (1962) *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

[9] Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Mac Lane, S. (1996) Structure in mathematics. *Philosophia Mathematica* 4(2), 174–183.

[11] Quine, W. V. (1951) *Mathematical logic*. Cambridge: Harvard University Press.

[12] Smith, R. (1989) Introduction. In *Prior analytics*, translated by R. Smith. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Nicolas Fillion est professeur agrégé de philosophie à l'Université Simon Fraser. Ses recherches portent sur la philosophie des sciences, les mathématiques appliquées, la logique, la pensée critique et l'épistémologie. Il est directeur du projet SFU Ethics Bowl et président d'Ethics Bowl Canada (https://www.ethicsbowl.ca/). Il a également été président de la CSHPM de 2022 à 2024. Il occupe par ailleurs le poste de responsable universitaire de l'Université Simon Fraser pour le Congrès 2027 de la Fédération des sciences humaines et sociales (https://www.federationhss.ca/fr/congres/congres-2027).

Droits d'auteurs & autorisations

La Société mathématique du Canada autorise les lecteurs individuels de cette publication à copier les articles pour leur usage personnel. L'utilisation à d'autres fins est strictement interdite. Pour obtenir une licence autre que la copie d'articles à des fins personnelles, veuillez contacter la Société mathématique du Canada pour demander des autorisations ou des conditions de licence.

Société mathématique du Canada — 616 Cooper St., Ottawa (ON) K1R 5J2, Canada

This site uses temporary cookies to implement much of the functionality of the content and features. Don't use the site unless you're okay with that.

Ok politique de confidentialité